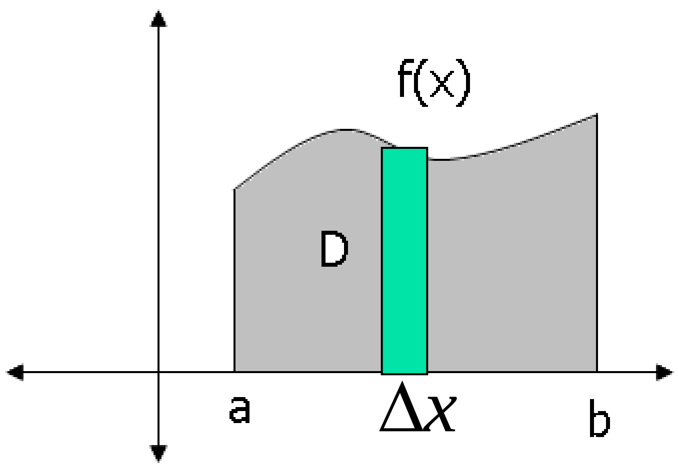
7. APLIKASI INTEGRAL

7.1 Menghitung Luas Daerah

a. Misalkan daerah $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$



Luas D = ?

Langkah :

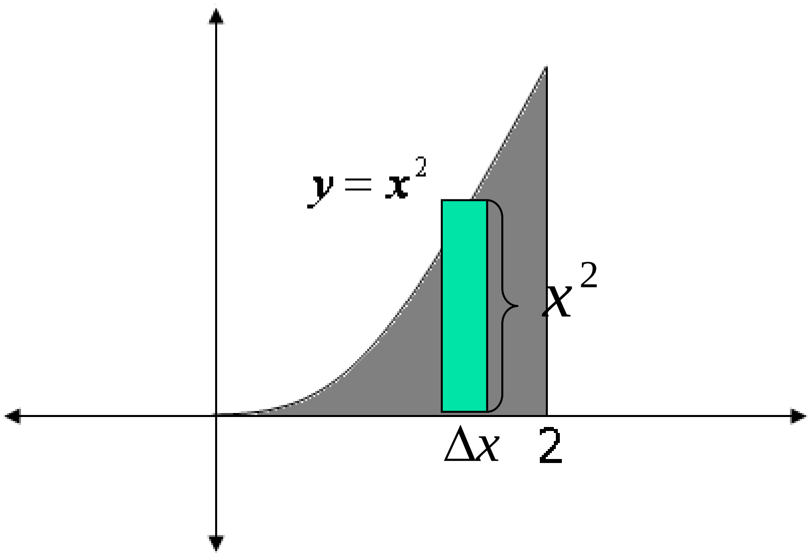
1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi f(x) alas(lebar) Δx

$$\Delta A \approx f(x)\Delta x$$

2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas D} = \text{A} = \int_a^b f(x)dx$$

Contoh : Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x, dan $x = 2$.



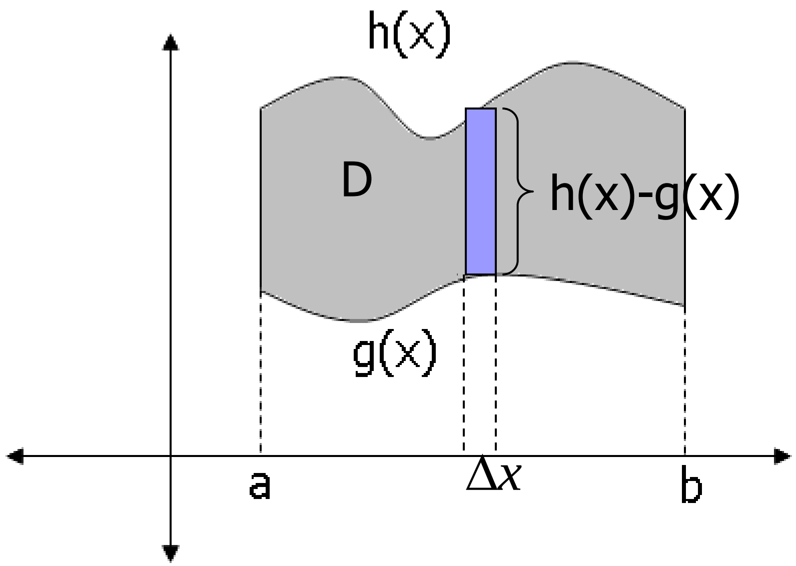
Luas irisan

$$\Delta A \approx x^2 \Delta x$$

Luas daerah

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big]_0^2 = \frac{8}{3}$$

b) Misalkan daerah $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$



Luas D = ?

Langkah :

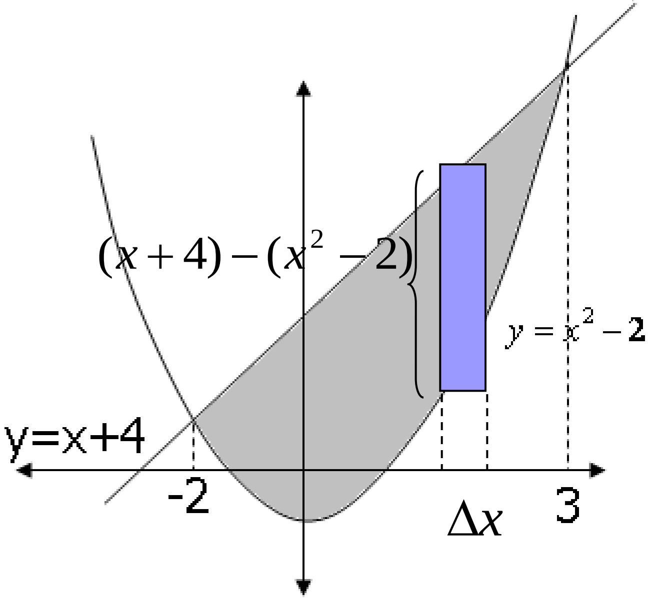
1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi h(x)-g(x) alas(lebar) Δx

$$\Delta A \approx (h(x) - g(x))\Delta x$$

2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas D = A = } \int_a^b (h(x) - g(x))dx$$

Contoh : Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x+4$ dan parabola $y = x^2 - 2$



Titik potong antara garis dan parabola

$$x + 4 = x^2 - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

x = -2, x = 3

Luas irisan

$$\Delta A \approx ((x+4) - (x^2 - 2))\Delta x$$

Sehingga luas daerah :

$$A = \int_{-2}^{3} ((x+4) - (x^2 - 2))dx = \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \Big]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}$$

Ctt :

Jika irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah atas dikurangi kurva yang berada disebelah bawah. Jika batas atas dan bawah irisan berubah untuk sembarang irisan di D maka daerah D harus dibagi dua atau lebih

Contoh : Hitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x,

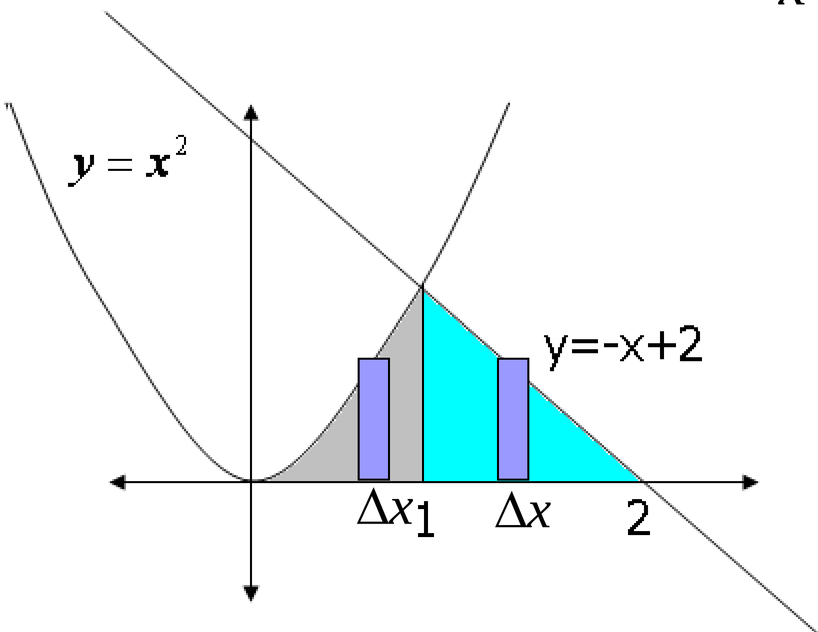
$$y = x^2 \text{ dan } y = -x + 2$$

Jawab

Titik potong

$$x^2 = -x + 2 \longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\longrightarrow \quad x = -2,\ x = 1$$



Jika dibuat irisan tegak, maka daerah harus dibagi menjadi dua bagian

Luas irisan I

$$\Delta A_1 \approx x^2 \Delta x$$

Luas irisan II

$$\Delta A_2 \approx (-x + 2)\Delta x$$

Luas daerah I

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Luas daerah II

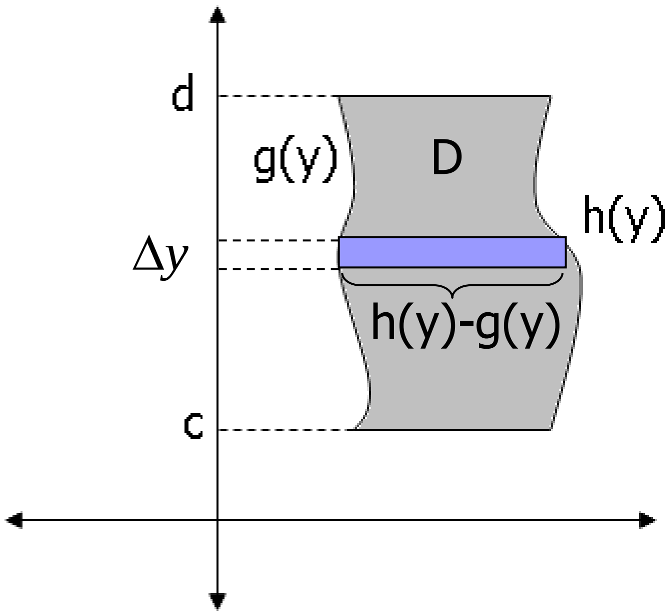
$$A_2 = \int_1^2 -x+2 \; dx = -\tfrac{1}{2} x^2 + 2x \Big|_1^2$$

$$= (-2+4) - (-\tfrac{1}{2} + 2) = \frac{1}{2}$$

Sehingga luas daerah

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

c). Misalkan daerah $D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, g(y) \le x \le h(y)\}$



Luas D = ?

Langkah :

1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi h(y)-g(y) alas(lebar) Δy

$$\Delta A \approx (h(y) - g(y))\Delta y$$

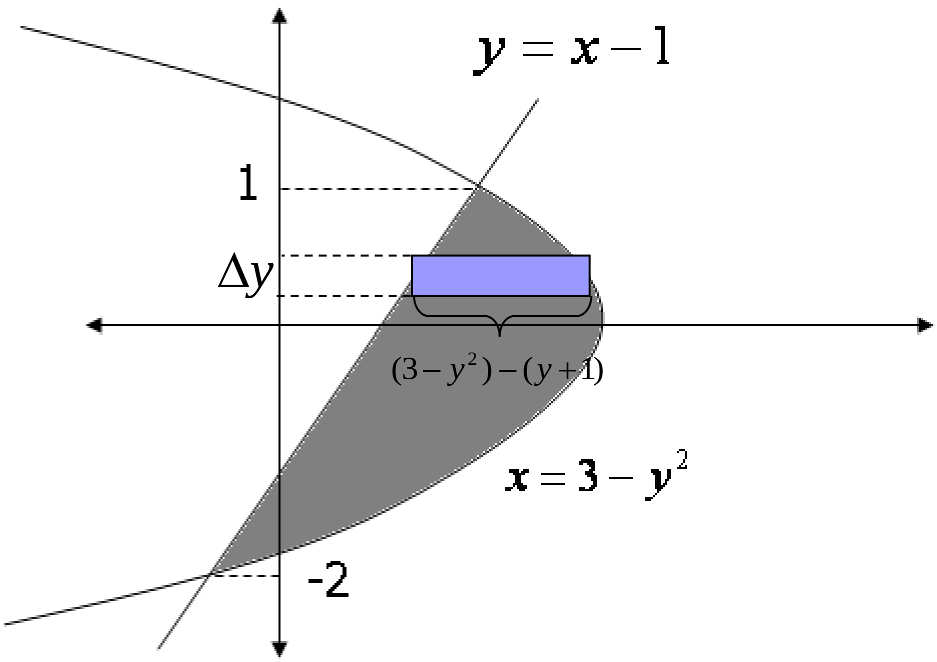
2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

Luas D = A = $\int_c^d (h(y) - g(y))\,dy$

Contoh: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $x = 3 - y^2$

dan $y = x - 1$

Jawab :



Titik potong antara garis dan parabola

$$y + 1 = 3 - y^2$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

y = -2 dan **y = 1**

Luas irisan

$$\Delta A = ((3 - y^2) - (y + 1))\,\Delta y$$

Sehingga luas daerah :

$$L = \int_{-2}^{1} ((3 - y^2) - (y + 1))dy \;\; = \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)dy$$

$$= -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y \Big]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

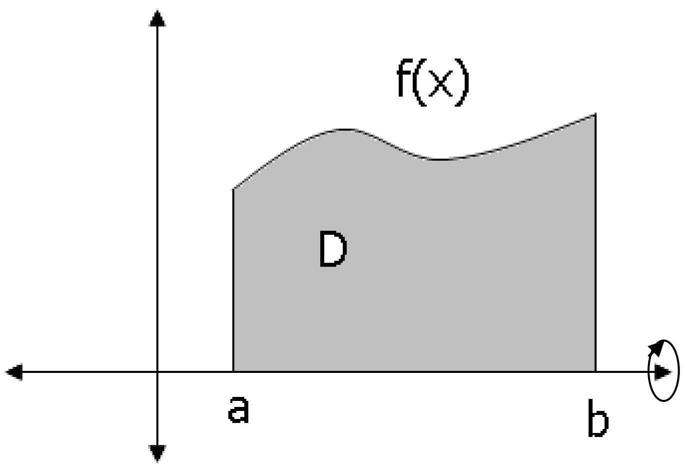
Ctt :

Jika irisan sejajar dengan sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah kanan dikurangi kurva yang berada disebelah kiri. Jika batas kanan dan kiri irisan berubah untuk sembarang irisan di D maka daerah D harus dibagi dua atau lebih

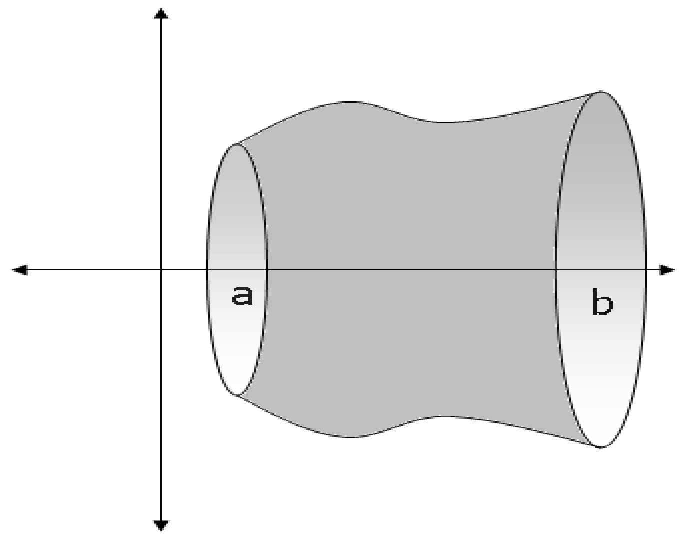
7.2 Menghitung volume benda putar

7.2.1 Metoda Cakram

a. Daerah $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b \, , 0 \le y \le f(x)\}$ diputar terhadap sumbu x



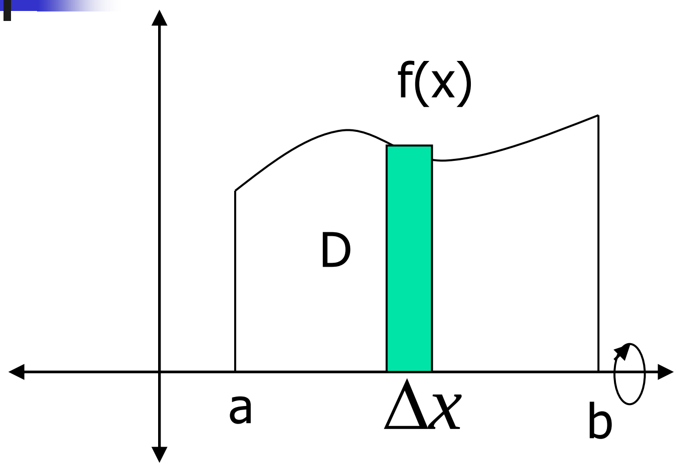
Daerah D



Benda putar

? Volume benda putar

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan Iris , hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.

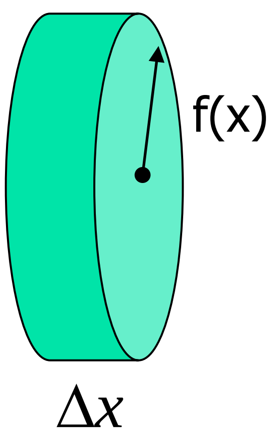


Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi f(x) dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari f(x).

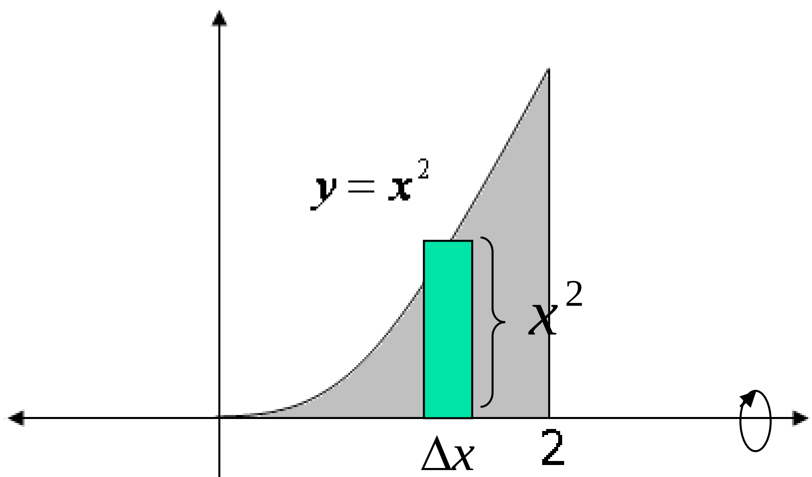
sehingga

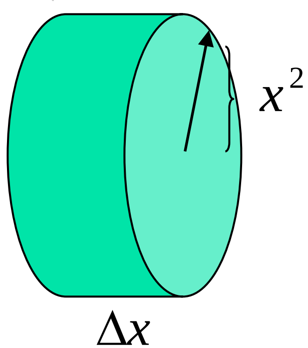
$$\Delta V \approx \pi\, f^2(x)\,\Delta x$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$



Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis x=2 diputar terhadap sumbu x





Jika irisan diputar terhadap sumbu x akan diperoleh cakram dengan jari-jari x^2 dan tebal Δx

Sehingga

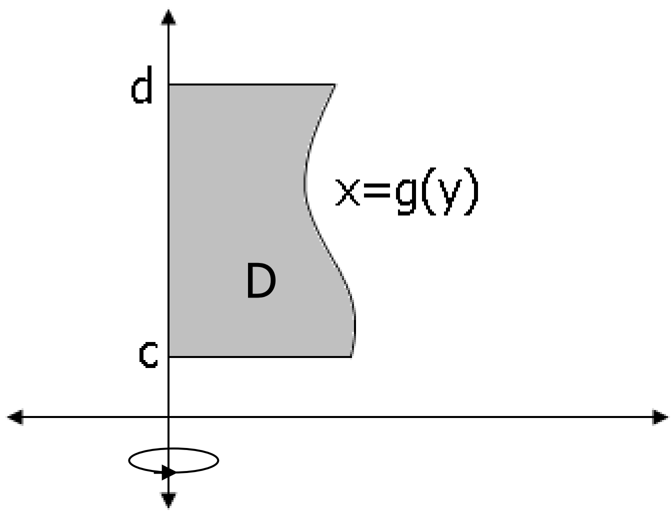
$$\Delta V \approx \pi (x^2)^2 \Delta x = \pi x^4 \Delta x$$

Volume benda putar

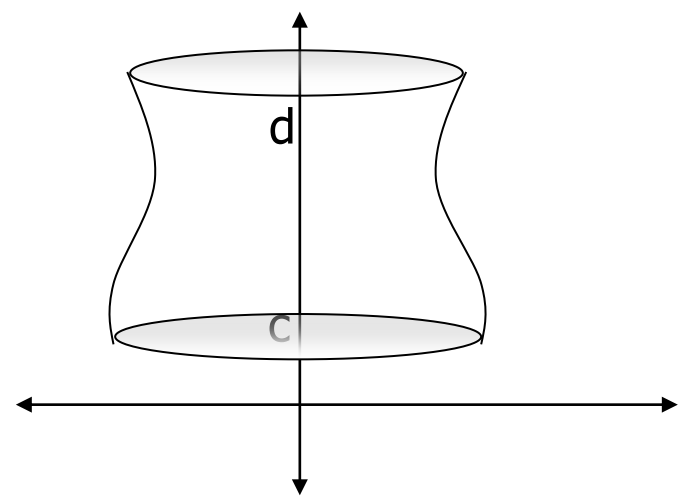
$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{5} \pi$$

b. Daerah $D = \{(x, y) \mid c \le y \le d \ , \ 0 \le x \le g(y)\}$

diputar terhadap sumbu y



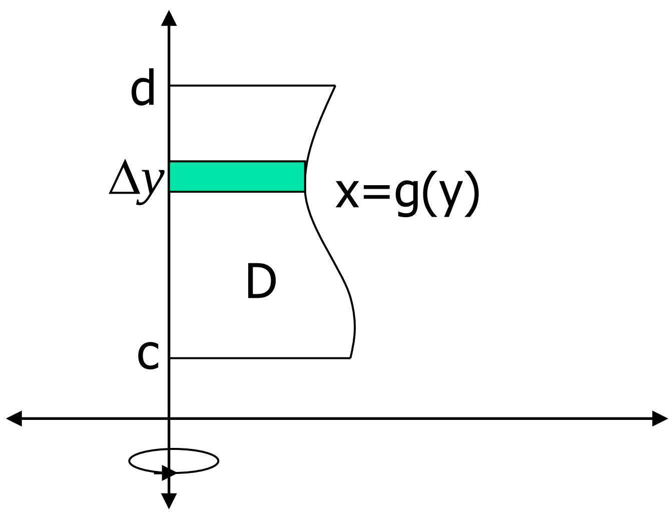
Daerah D

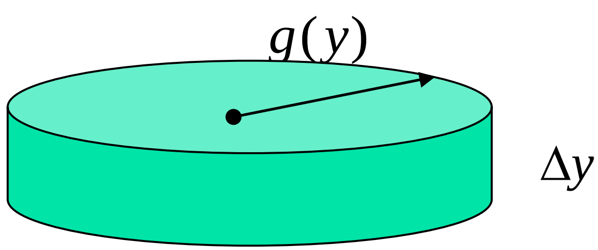


Benda putar

? Volume benda putar

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan Iris , hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.





Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi g(y) dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δy dan Jari-jari g(y).

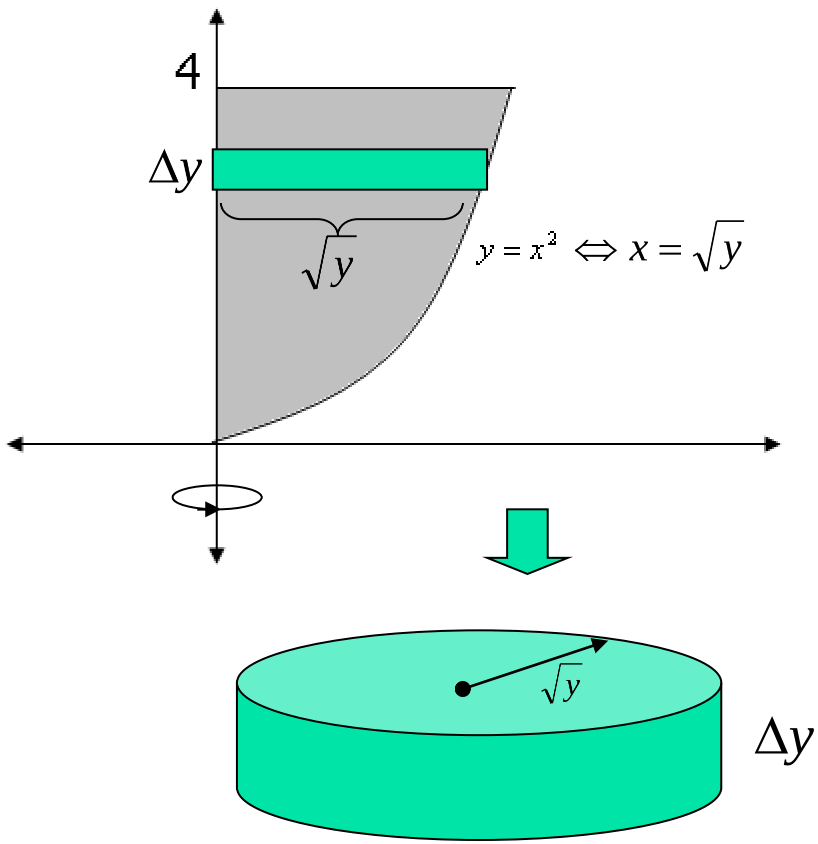
sehingga

$$\Delta V \approx \pi\, g^2(y)\, \Delta y$$

$$\Downarrow$$

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy$$

Contoh : Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ garis y = 4, dan sumbu y diputar terhadap sumbu y



Jika irisan dengan tinggi $\sqrt{y}$ dan tebal Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh cakram dengan jari-jari $\sqrt{y}$ dan tebal Δy

Sehingga

$$\Delta V = \pi(\sqrt{y})^2 \Delta y = \pi\, y\, \Delta y$$

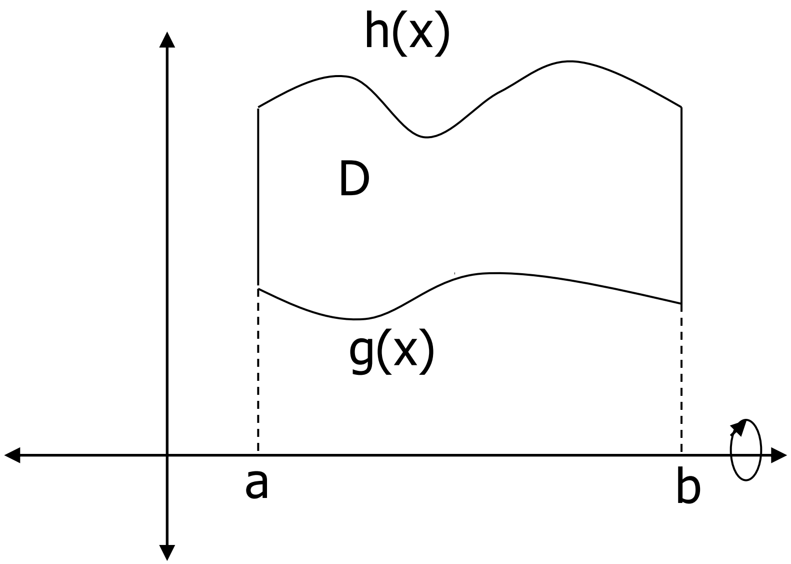
Volume benda putar

$$V = \pi \int_0^4 y dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 = 8\pi$$

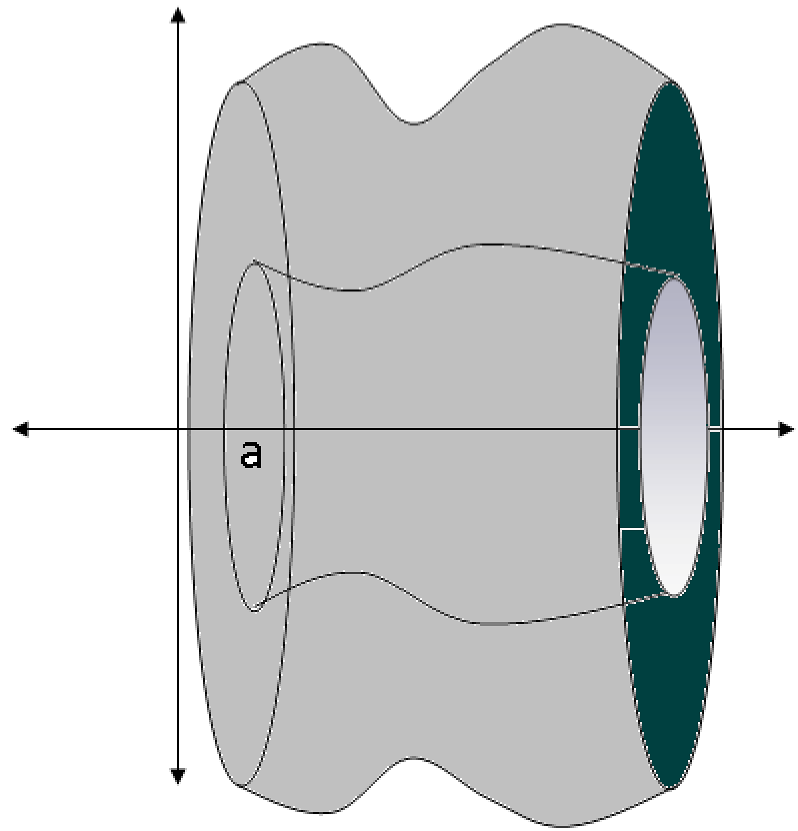
7.2.2 Metoda Cincin

a. Daerah $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b \;,\; g(x) \le y \le h(x)\}$

diputar terhadap sumbu x



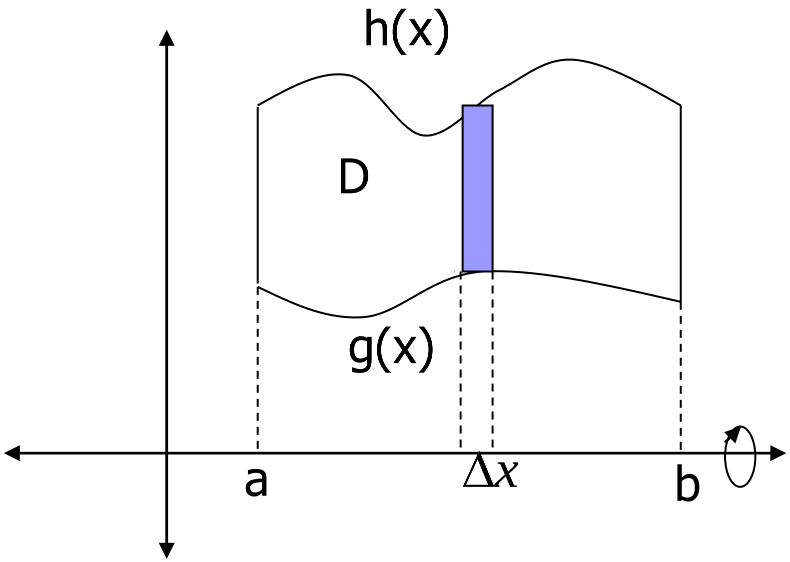
Daerah D

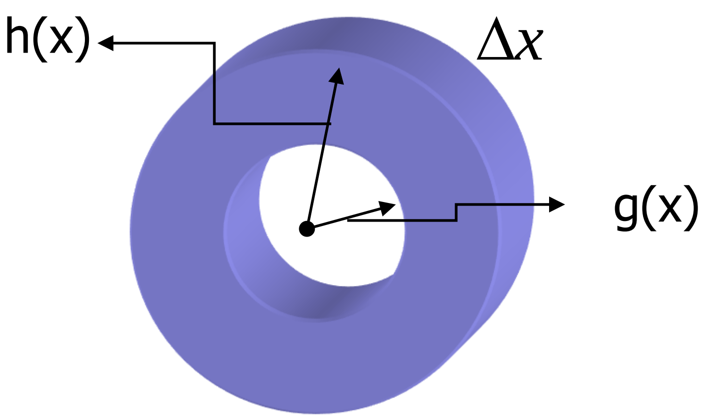


Benda putar

? Volume benda putar

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan Iris , hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.





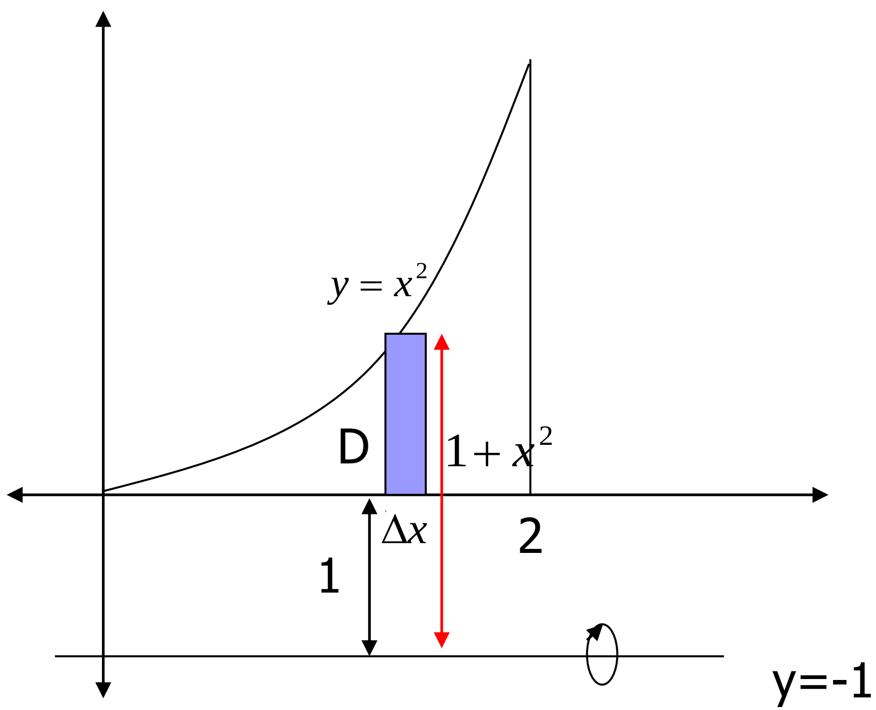
Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi h(x)-g(x) dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cincin dengan tebal Δx dan jari –jari luar h(x) dan jari-jari dalam g(x).

sehingga

$$\Delta V \approx \pi (h^2(x) - g^2(x))\Delta x$$

$$V = \pi \int_a^b (h^2(x) - g^2(x))dx$$

Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis x=2 diputar terhadap garis y=-1



Jika irisan diputar terhadap garis y=1
Akan diperoleh suatu cincin dengan
Jari-jari dalam 1 dan jari-jari luar $1 + x^2$

Sehingga

$$\Delta V = \pi((x^2 + 1)^2 - 1^2)\Delta x$$

$$= \pi(x^4 + 2x^2 + 1 - 1)\Delta x$$

$$= \pi(x^4 + 2x^2)\Delta x$$

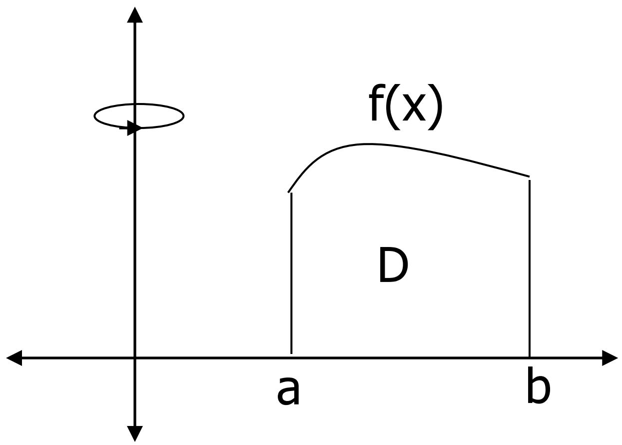
Volume benda putar :

$$V = \pi \int_0^2 x^4 + 2x^2 dx = \pi(\tfrac{1}{5} x^5 + \tfrac{2}{3} x^3 |_0^2) = \pi(\tfrac{32}{5} + \tfrac{16}{3}) = \tfrac{186}{15}\pi$$

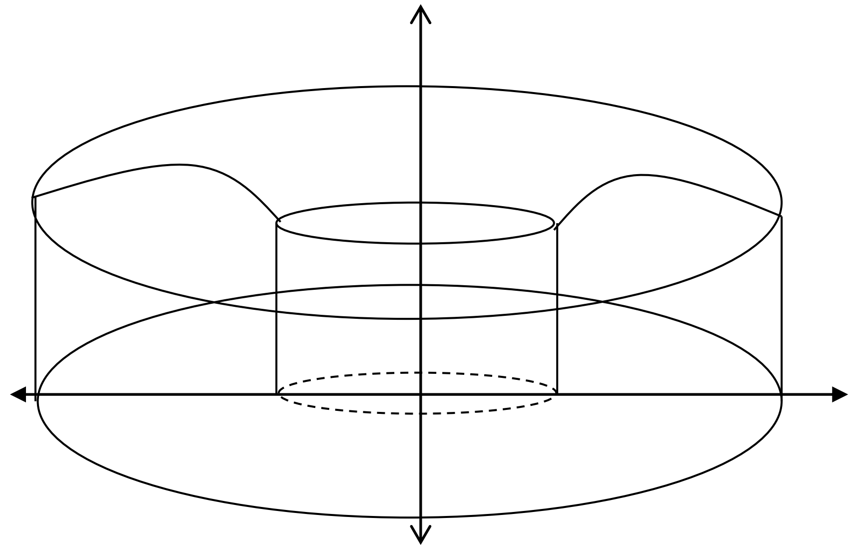
7.2.3 Metoda Kulit Tabung

Diketahui $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b \,,\, 0 \le y \le f(x)\}$

Jika D diputar terhadap sumbu y diperoleh benda putar



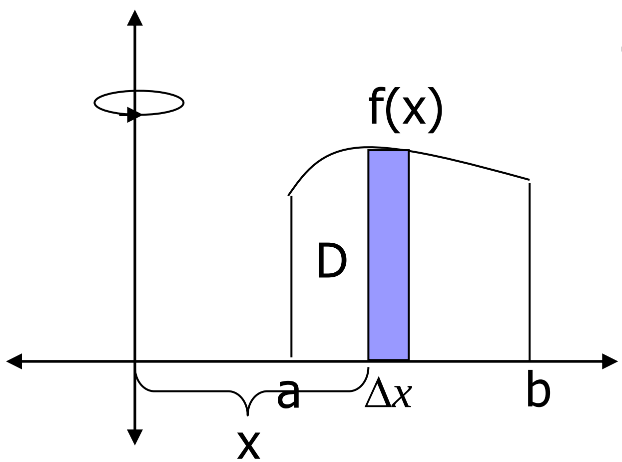
Daerah D



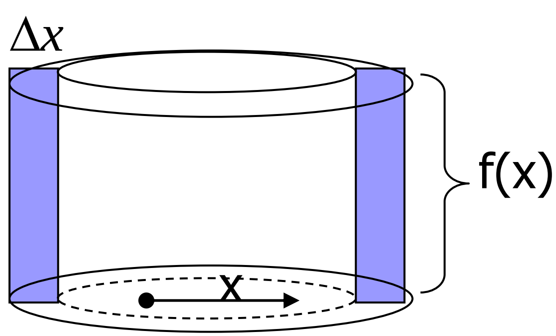
Benda putar

Volume benda putar ?

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan Iris , hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.



Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi f(x) dan alas Δx serta berjarak x dari sumbu y diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu kulit tabung dengan tinggi f(x), jari-jari x, dan tebal Δx

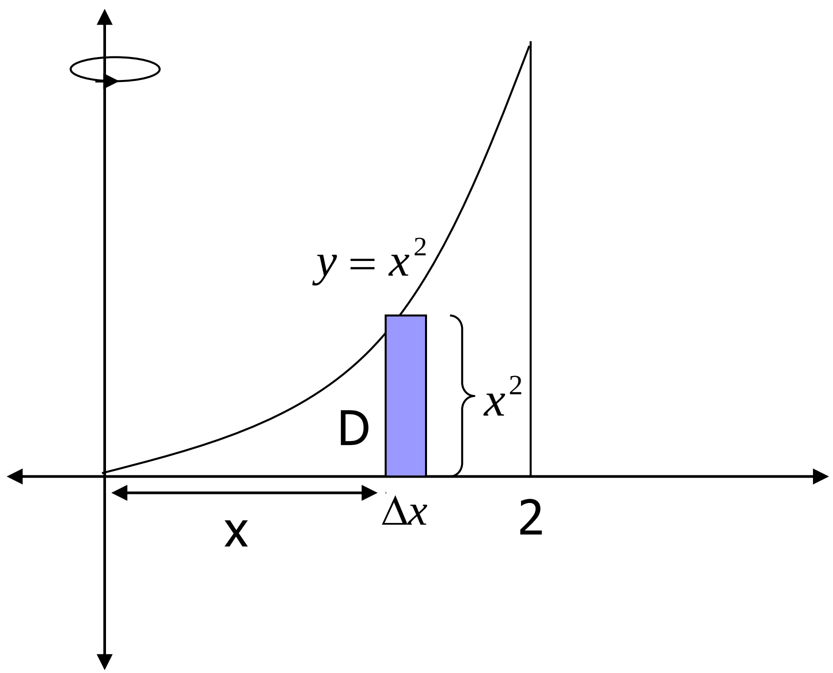


sehingga

$$\Delta V \approx 2\pi\, x\, f(x) \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis x=2 diputar terhadap sumbu y



Jika irisan dengan tinggi x^2 ,tebal Δx dan berjarak x dari sumbu y diputar terhadap sumbu y akan diperoleh kulit tabung dengan tinggi x^2 , tebal Δx dan jari jari x

Sehingga

$$\Delta V = 2\pi\, x\, x^2 \Delta x = 2\pi\, x^3\, \Delta x$$

Volume benda putar

$$V = 2\pi \int_0^2 x^3 dx = \frac{\pi}{2} x^4 \Big|_0^2 = 8\pi$$

Catatan :

-Metoda cakram/cincin

Irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu putar

- Metoda kulit tabung

Irisan dibuat sejajar dengan sumbu putar

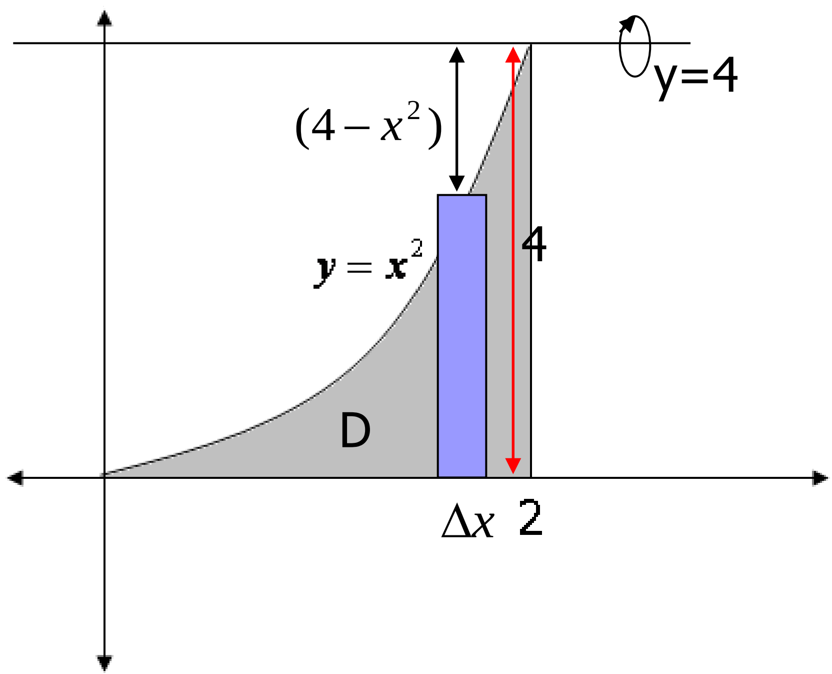
Jika daerah dan sumbu putarnya sama maka perhitungan dengan menggunakan metoda cakram/cincin dan metoda kulit tabung akan menghasilkan hasil yang sama

Contoh Tentukan benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi Oleh parabola $y = x^2$,garis x = 2, dan sumbu x diputar terhadap

a. Garis y = 4
b. Garis x = 3

a. Sumbu putar y = 4

(i) Metoda cincin



Jika irisan diputar terhadap garis y=4 akan diperoleh cincin dengan

Jari-jari dalam $= r_d = (4-x^2)$

Jari-jari luar $= r_l = 4$

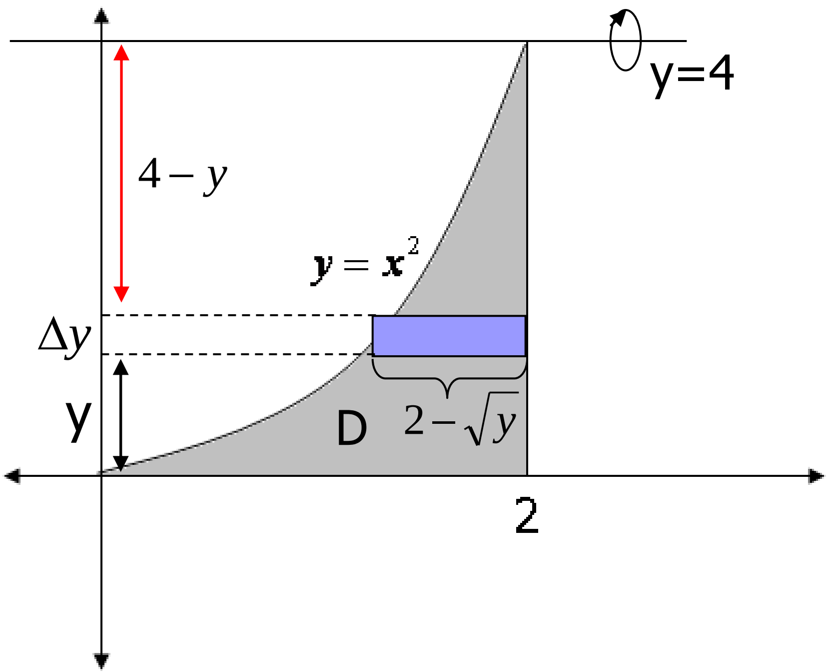
Sehingga

$$\Delta V \approx \pi((4)^2 - (4-x^2)^2)\Delta x$$
$$= \pi(8x^2 - x^4)\Delta x$$

Volume benda putar

$$V = \pi\int_0^2 (8x^2 - x^4)dx = \pi(\tfrac{8}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5)\Big|_0^2 = \pi(\tfrac{64}{3} - \tfrac{32}{5}) = \tfrac{224}{15}\pi$$

(ii) Metoda kulit tabung



Jika irisan diputar terhadap garis y=4 akan diperoleh kulit tabung dengan

Jari-jari = r = $4-y$

Tinggi = h = $2-\sqrt{y}$

Tebal = Δy

Sehingga

$$\Delta V \approx 2\pi(4-y)(2-\sqrt{y})\Delta y$$

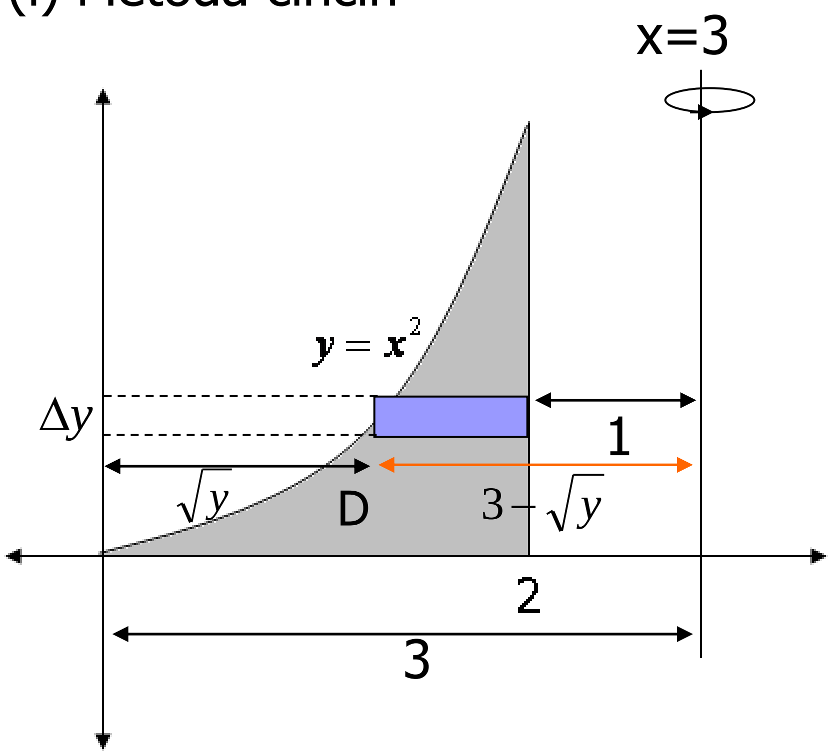
$$= 2\pi(8-4\sqrt{y}-2y+y\sqrt{y})\Delta y$$

Volume benda putar

$$V = 2\pi\int_0^4 (8-4\sqrt{y}-2y+y\sqrt{y})dy = 2\pi(8y-\tfrac{8}{3}y^{3/2}-y^2+\tfrac{2}{5}y^{5/2})\Big|_0^4 = \frac{224}{15}\pi$$

b. Sumbu putar x=3

(i) Metoda cincin



Jika irisan diputar terhadap garis x=3 diperoleh cincin dengan

Jari-jari dalam = $r_d = 1$

Jari-jari luar = $r_l = 3 - \sqrt{y}$

Sehingga

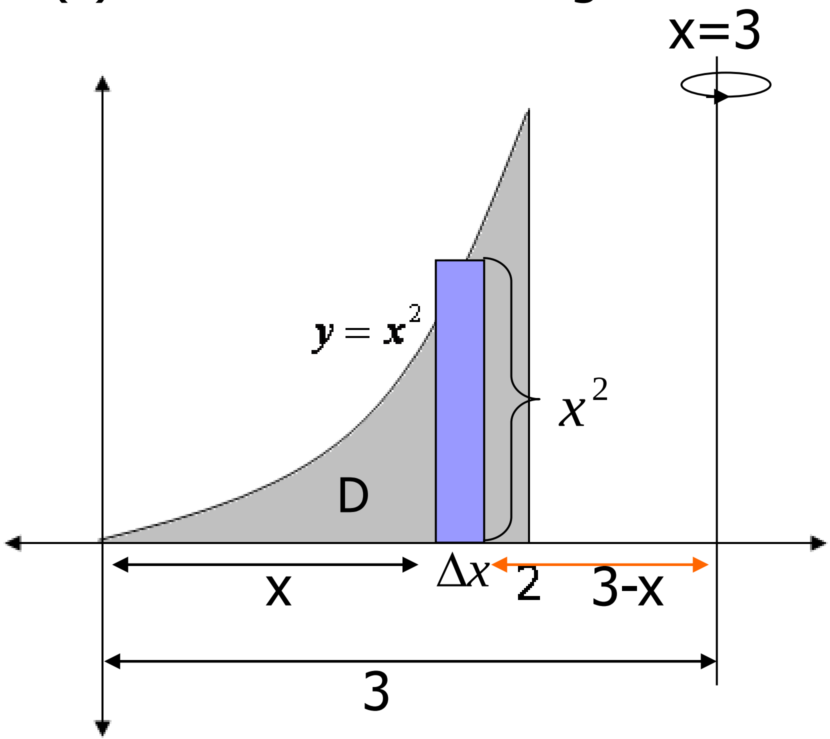
$$\Delta V \approx \pi((3-\sqrt{y})^2 - (1)^2)\Delta y$$

$$= \pi(8 - 6\sqrt{y} + y)\Delta y$$

Volume benda putar

$$V = \pi \int_0^4 (8 - 6\sqrt{y} + y)dy \quad = \pi(8y - 4y^{3/2} + 8 \,|_0^4) = 8\pi$$

(ii) Metoda kulit tabung



Jika irisan diputar terhadap garis x=3 diperoleh kulit tabung dengan

Tinggi = h = x^2

Jari-jari = r = 3-x

Tebal = Δx

Sehingga

$$\Delta V \approx 2\pi(3-x)x^2\Delta x$$
$$= 2\pi(3x^2 - x^3)\Delta x$$

Volume benda putar

$$V = 2\pi\int_0^2 (3x^2 - x^3)dx = 2\pi(x^3 - \tfrac{1}{4}x^4)\Big|_0^2 = 2\pi(8-4) = 8\pi$$

7.3 Panjang Kurva

Persamaan parameter kurva dibidang

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad , a \le t \le b \qquad (1)$$

Titik A(f(a),g(a)) disebut titik pangkal kurva dan titik B(f(b),g(b)) disebut titik ujung dari kurva.

Definisi : Suatu kurva dalam bentuk parameter seperti (1) disebut mulus jika

(i) f' dan g' kontinu pada [a,b]

Kurva tidak berubah sekonyong-konyong

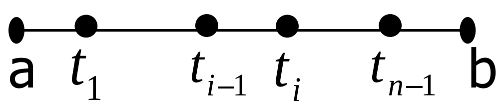
(ii) f' dan g' tidak secara bersamaan nol pada (a,b)

Misal diberikan kurva dalam bentuk parameter (1), akan dihitung panjang kurva

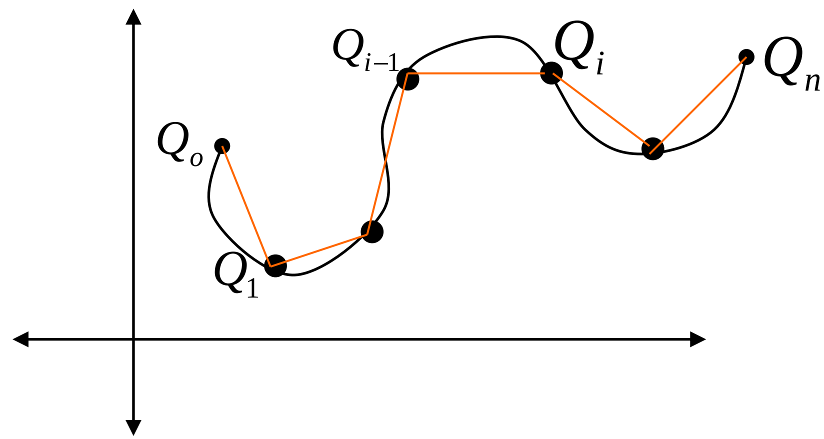
Langkah

1. Partisi [a,b] menjadi n bagian, dengan titik-titik pembagian

$$a = t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

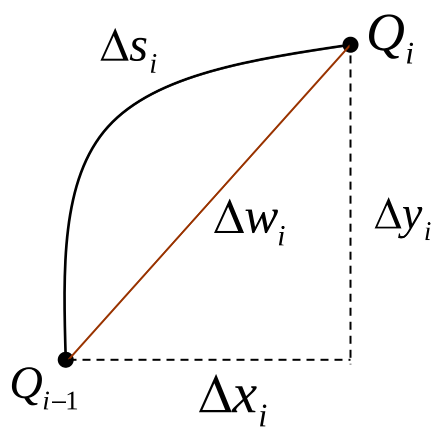


Partisi pada [a,b]



Paritisi pada kurva

2. Hampiri panjang kurva



Δs_i panjang busur $Q_{i-1}Q_i$

Δw_i panjang tali busur $Q_{i-1}Q_i$

Panjang busur dihampiri dengan panjang tali busur

$$\Delta s_i \approx \Delta w_i$$
$$= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$
$$= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan, terdapat $\hat{t}_i, \bar{t}_i \in (t_{i-1}, t_i)$ sehingga

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t}_i)\Delta t$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t}_i)\Delta t$$

dengan $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

sehingga

$$\Delta w_i = \sqrt{[f'(\bar{t}_i)\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\Delta t_i]^2}$$

$$= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

Panjang kurva dihampiri oleh jumlah panjang tali busur

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

Dengan mengambil panjang partisi(||P||) menuju nol diperoleh

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

Ctt:

Jika persamaan kurva y=f(x), $a \le x \le b$

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \qquad = \int_a^b \sqrt{[\frac{dx}{dt}]^2 + [\frac{dy}{dt}]^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 (1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Jika persamaan kurva x=g(y), $c \le y \le d$

$$L = \int_c^d \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \quad = \int_c^d \sqrt{[\frac{dx}{dt}]^2 + [\frac{dy}{dt}]^2}\, dt$$

$$= \int_c^d \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\, dt = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Contoh : Hitung panjang kurva

1. $x = t^3, y = t^2;\ 0 \le t \le 4$

$$x'(t) = 3t^2, y'(t) = 2t$$

Panjang kurva

$$L = \int_0^4 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}\,dt \quad = \int_0^4 \sqrt{9t^4 + 4t^2}\,dt \quad = \int_0^4 \sqrt{t^2(9t^2+4)}\,dt$$

$$= \int_0^4 t\sqrt{9t^2+4}\,dt \quad = \int_0^4 t(9t^2+4)^{1/2}\,\frac{d(9t^2+4)}{18t}$$

$$= \tfrac{1}{18}\tfrac{2}{3}(9t^2+4)^{3/2}\Big|_0^4 \quad = \tfrac{1}{27}(40\sqrt{40}-8) = \tfrac{1}{27}(80\sqrt{10}-8)$$

2. $y = 2x^{3/2}$ antara x =1/3 dan x=7

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^{1/2}$$

$$L = \int_{1/3}^{7} \sqrt{1+\left(3x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_{1/3}^{7} \sqrt{1+9x}\,dx = \tfrac{1}{9}\int_{1/3}^{7} (1+9x)^{1/2}\,d(1+9x)$$

$$= \tfrac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\Big|_{1/3}^{7} = \tfrac{2}{27}(512-8) = 37\tfrac{1}{3}$$

Soal Latihan

A. Gambarkan dan hitung luas daerah yang dibatasi oleh

1. $y = x^2$ dan $y = x + 2$

2. $y = x^3, y = -x,$ dan $y = 8$

3. $y = x$, $y = 4x$, $y = -x + 2$

4. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

B. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang di batasi oleh grafik fungsi-fungsi berikut diputar terhadap sumbu *x*

1. $y = x^3, y = 0, \text{ dan } x = 2$
2. $y = 9 - x^2 \text{ dan } y = 0$
3. $y = x^2 \text{ dan } y = 4x$
4. $y = \sin x, \; y = \cos x, \; x = 0 \;, \; x = \pi/4$
5. $y = x^3 \text{ dan } y = x, \text{ di kuadran } 1$

C. Daerah D dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$ dan garis $x = 2y$.
Hitung volume benda putar, jika D diputar terhadap :

(1) sumbu x
(2) garis $x = -1$
(3) garis $y = 4$
(4) sumbu y
(5) garis $y = -2$
(6) garis $x = 4$

D. Daerah D dibatasi oleh parabol $y = 4x - x^2$ dan garis $x + y = 4$.
Hitung volume benda putar, jika D diputar terhadap :

(1) sumbu x
(2) garis $x = 6$
(3) sumbu y
(4) garis $y = -1$

E. Hitung panjang kurva berikut

1. $x = 4\sin t,\ y = 4\cos t - 5;\ 0 \le t \le \pi$
2. $x = 3t^2 + 2,\ \ y = 2t^3 - 1/2;\ 1 \le t \le 4$
3. $y = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2},\ \ 0 \le x \le 1$
4. $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4},\ 2 \le x \le 4$
5. $y = \ln(1 - x^2),\ \ 0 \le x \le 1/2$
6. $x = \dfrac{1}{3}\sqrt{y}(y-3),\ 0 \le y \le 9$