

6. INTEGRAL

Created with

 **nitro**^{PDF} professional

download the free trial online at nitropdf.com/professional

6. 1 Integral Tak Tentu

$F(x)$ disebut **suatu anti turunan** dari $f(x)$ pada interval I bila

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Contoh

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ dan $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ adalah anti turunan dari

$f(x) = x^2$ karena $F'(x) = f(x)$.

Anti turunan dari suatu fungsi tidak tunggal, tapi perbedaannya berupa suatu bilangan konstan.

Anti turunan disebut juga Integral Tak tentu.

Notasi :

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

6.2 Sifat-sifat integral tak tentu

A. Sifat yang diperoleh langsung dari turunan

$$1. \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

$$2. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$3. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$4. \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$5. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

B. Sifat Kelinieran

$$\int [a f(x) + b g(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

C. Integral dengan substitusi

Misal $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, dan F suatu anti turunan dari f , maka

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Contoh : Hitung $\int \sin(2x + 1) dx$

Misal $u = 2x + 1 \rightarrow du = 2x dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ sehingga

$$\int \sin(2x + 1) dx = \frac{1}{2} \int \sin u du$$

$$= -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C$$

Setelah dilakukan substitusi $u = g(x)$, Integran (fungsi yang diintegrasikan) hanya fungsi dari u

Contoh : Hitung $\int (x^3 + 1)^{10} x^5 dx$

Jawab : Misal $u = x^3 + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

Maka

$$\int (x^3 + 1)^{10} x^5 dx = \int u^{10} x^5 \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int u^{10} x^3 du$$

Integran fungsi dr u dan x

Ctt : x^3 Tidak bisa di keluarkan dari integral, karena bukan suatu konstanta

substitusi x^3 dengan menggunakan hubungan $u = x^3 + 1 \rightarrow x^3 = u - 1$ sehingga

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 1)^{10} x^5 dx &= \frac{1}{3} \int u^{10} (u - 1) du = \frac{1}{3} \int u^{11} - u^{10} du = \frac{1}{36} u^{12} - \frac{1}{33} u^{11} + C \\ &= \frac{1}{36} (x^3 + 1)^{12} - \frac{1}{33} (x^3 + 1)^{11} + C \end{aligned}$$

6.3 Notasi Sigma (Σ)

Notasi sigma (jumlah) :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^n k = \underbrace{k + k + \dots + k}_{n \text{ suku}} = nk$$

Sifat dan rumus sigma

$$1. \sum_{i=1}^n (ka_i + lb_i) = k \sum_{i=1}^n a_i + l \sum_{i=1}^n b_i$$

$$2. \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

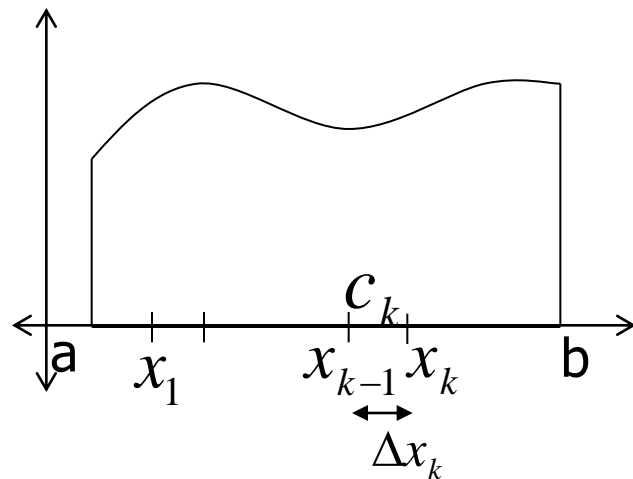
$$3. \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$4. \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Sifat nomor 2 sampai nomor 4 dapat dibuktikan dengan induksi matematika

6.4 Integral Tentu

Integral tentu dikonstruksi dengan **jumlah Rieman** yang menggambarkan luas daerah. Misal fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang tutup $[a, b]$.



Langkah :

1. Partisi selang $[a, b]$ menjadi n selang dengan titik pembagian

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$P = \{ a = x_0, x_1, x_2, \dots, b = x_n \}$$

disebut partisi dari $[a, b]$.

2. Definisikan panjang partisi P , sebagai

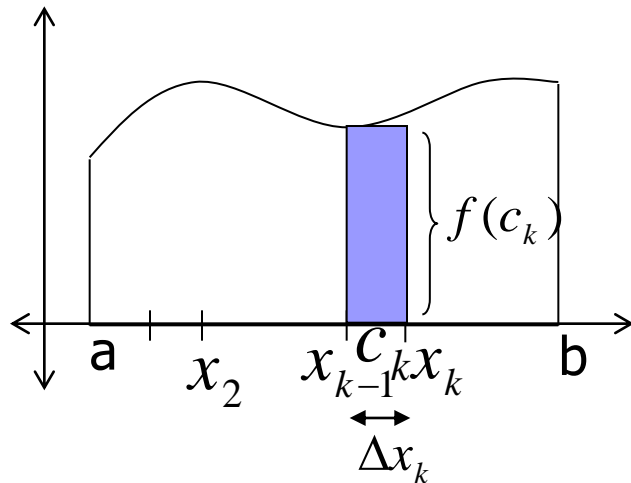
$$\| P \| = \text{Maks}_{1 \leq k \leq n} | \Delta x_k |, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

3. Pilih $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, 2, \dots, n$

Created with

 **nitro**PDF[®] professional

download the free trial online at nitropdf.com/professional



4. Bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Jika $\|P\| \rightarrow 0$, maka diperoleh limit jumlah Riemann

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

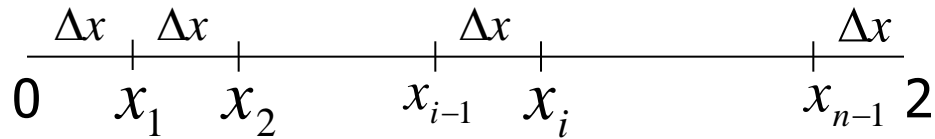
Jika limit ini ada, maka dikatakan f terintegralkan Riemann pada selang $[a, b]$, dan ditulis sbg

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Contoh Hitung $\int_0^2 x - 2 dx$

Jawab : Langkah

(i) Partisi selang $[0,2]$ menjadi n bagian yang sama panjang $\Rightarrow \Delta x = \frac{2}{n}$



sehingga

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 0 + 2\Delta x = \frac{2 \cdot 2}{n}$$

.....

.....

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{2i}{n}$$

(ii) Pilih $c_i = x_i$

(iii) Bentuk jumlah reiman

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n} - 2\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{4i}{n^2} - \frac{4}{n}\right) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{4}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{4}{n}n = -2 + \frac{2}{n}\end{aligned}$$

(iv) Jika $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^2 x - 2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{2}{n}\right) = -2$$

Ctt: Jika fungsi $y=f(x)$ positif pada selang $[a,b]$ maka integral tentu diatas menyatakan luas daerah yang terletak dibawah grafik $y=f(x)$ dan diatas sumbu x antara garis $x = a$ dan $x = b$

Sifat integral tentu

1. Sifat linear

$$\int_a^b [p f(x) + q g(x)] dx = p \int_a^b f(x) dx + q \int_a^b g(x) dx$$

2. Jika $a < b < c$, maka

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$3. \int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{dan} \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$4. \text{ Bila } f(x) \text{ ganjil, maka } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$5. \text{ Bila } f(x) \text{ genap, maka } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Contoh Hitung

$$\int_{-3}^3 x \sqrt{x^4 + x^2 + 7} dx$$

Jawab

$$f(-x) = -x \sqrt{(-x)^4 + (-x)^2 + 7} = -x \sqrt{x^4 + x^2 + 7} = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ ganjil}$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^3 x \sqrt{x^4 + x^2 + 7} dx = 0$$

6.6 Teorema Dasar Kalkulus (TDK)

6.6.1 TDK I

Misal $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ dan $F(x)$ suatu anti turunan dari $f(x)$.

Maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Contoh Selesaikan integral tentu $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x) dx$

Jawab : Misal $u = 2x \rightarrow du = 2 dx$. Maka $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$

Sehingga

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{-1}{2} (\cos 2\pi - \cos \pi) = -1$$

Contoh hitung

$$\int_1^5 |x - 2| dx$$

Jawab :

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^5 |x - 2| dx &= \int_1^2 -(x - 2) dx + \int_2^5 (x - 2) dx = \left. \frac{-1}{2} x^2 + 2x \right|_1^2 + \left. \frac{1}{2} x^2 - 2x \right|_2^5 \\ &= ((-2 + 4) - (-1/2 + 2)) + ((25/2 - 10) - (2 - 4)) \\ &= 1/2 + 9/2 = 5 \end{aligned}$$

6.6.2 TDK II (Pendiferensialan Integral Tentu)

- Jika fungsi f kontinu pada $[a,b]$, dan x sebuah (variabel) titik dalam $[a,b]$, maka

$$D_x \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

Secara umum

$$D_x \left(\int_a^{u(x)} f(t) dt \right) = f(u(x))u'(x)$$

$$D_x \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

Contoh Hitung $G'(x)$ dari

$$\text{a. } G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^3} dt \quad \text{b. } G(x) = \int_4^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt$$

Jawab

$$\text{a. } f(t) = \sqrt{1+t^3} \quad \longrightarrow \quad G'(x) = \sqrt{1+x^3}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f(t) &= \sqrt{1+t^3} \\ u(x) &= x^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} G'(x) &= \sqrt{1+(x^2)^3} Dx(x^2) \\ &= 2x\sqrt{1+x^6} \end{aligned}$$

Soal Latihan

A. Untuk soal 1-5 carilah anti turunan $F(x) + C$ bila

1. $f(x) = 3x^2 + 10x + 5$

2. $f(x) = x^2(20x^7 - 7x^5 + 6)$

3. $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^7}$

4. $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$

5. $f(x) = x^{-3/4}$

Selesaikan integral tak tentu berikut

$$6. \int (x^2 - 4)^3 2x \, dx$$

$$7. \int (x^2 - 3x + 2)^2 (2x - 3) \, dx$$

$$8. \int 3x \sqrt{3x^2 + 7} \, dx$$

$$9. \int (5x^2 + 1) \sqrt{5x^3 + 3x - 2} \, dx$$

$$10. \int \frac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}} \, dy$$

$$11. \int (\cos^4 2x)(-2 \sin 2x) \, dx$$

B. Untuk soal 1 s/d 4 hitung $\int_0^5 f(x) dx$

$$1. f(x) = \begin{cases} x + 2, & 0 \leq x < 2 \\ 6 - x, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 3 \\ x - 4, & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$3. f(x) = |x - 1|$$

$$4. f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$$

Untuk soal 5 s/d 10 hitung integral tentu berikut

$$5. \int_{-1}^0 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$$

$$10. \int_0^8 x^2 - 6x + 8 dx$$

$$6. \int_{-3}^3 8t \sqrt{7 + 2t^2} dt$$

$$7. \int_1^3 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}} dx$$

$$8. \int_0^{\pi/2} \sin^2 3x \cos 3x dx$$

$$9. \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

Untuk soal 11 s/d 15 tentukan $G'(x)$ dari

$$11. G(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$12. G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$13. G(x) = \int_2^{x^2+1} \sqrt{2 + \sin t} dt$$

$$14. G(x) = \int_{\pi}^x \tan(s^2) ds$$

$$15. G(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$$

16. Tentukan dimana f cekung ke atas, jika $f(x) = \int_0^x \frac{1+t}{1+t^2} dt$

17. Jika f kontinu pada $[0, \infty]$ dan $\int_0^{x^2} f(t) dt = x(\cos \pi x - 1)$ tentukan $f(4)$.

18. Jika f kontinu pada $[4, \infty]$ dan $\int_4^{x^2} \frac{x^2}{1 + \sqrt{3 + t^2}} dt$, tentukan $f'(2)$

19. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$.