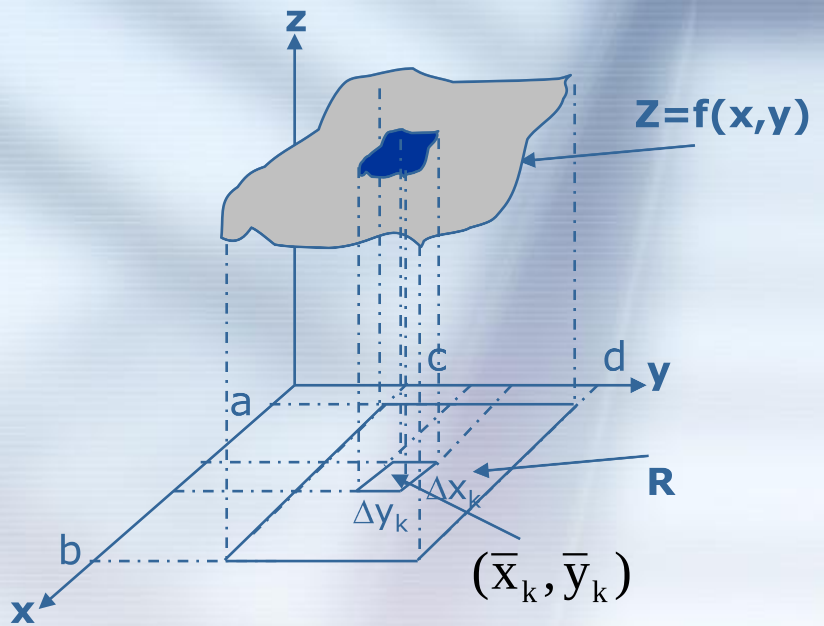
Universitas Indonusa Esa Unggul
Fakultas Ilmu Komputer
Teknik Informatika

Integral Lipat Dua

Integral Lipat Dua

Misalkan $z = f(x,y)$ terdefinisi pada R merupakan suatu persegi panjang tertutup, yaitu : $R = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$



1. Bentuk partisi [a,b] dan [c,d] menjadi n bagian.
2. Pilih $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ pada setiap sub interval pada $[x_i, x_{i-1}]$ dan $[y_i, y_{i-1}]$
3. Bentuk jumlah Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta A_k$$

4. Jika $n \rightarrow \infty$ ($|P| \rightarrow 0$) diperoleh limit jumlah Riemann.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta A_k$$

Jika limit ada, maka $z = f(x,y)$ terintegralkan Riemann pada R, ditulis

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta A_k$$

Integral Lipat Dua

Definisi integral lipat dua :

Misalkan *f* suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup R.

Jika $\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$ ada, kita katakan *f* dapat diintegralkan pada R. Lebih lanjut $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ yang disebut integral lipat dua *f* pada R diberikan oleh :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$

atau

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta x_k \Delta y_k$$

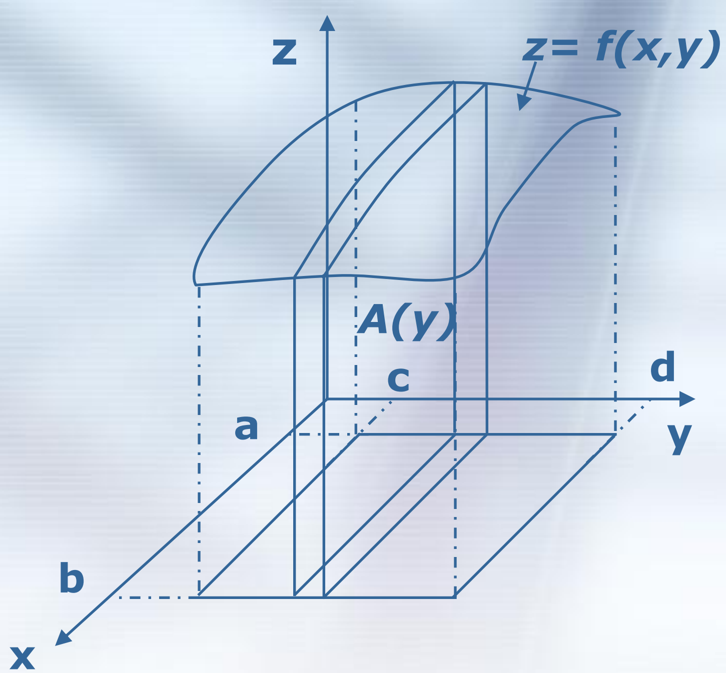
Arti Geometri Integral Lipat Dua

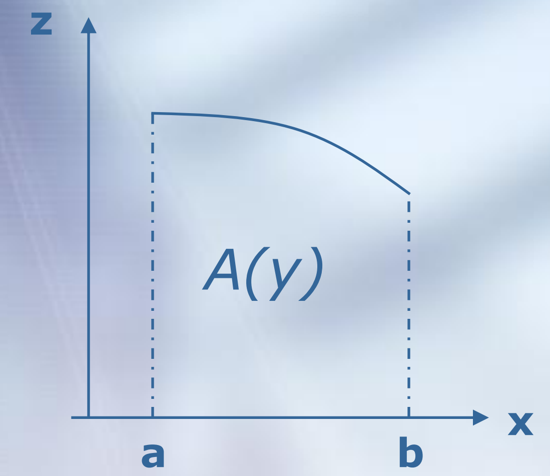
Jika $z = f(x,y)$ kontinu, $f(x,y) \geq 0$ pada persegpanjang R, maka $\iint_R f(x,y)\,dA$ menyatakan volume benda padat yang terletak di bawah permukaan permukaan $z = f(x,y)$ dan di atas R.

Menghitung Integral Lipat Dua

Jika $f(x,y) \geq 0$ pada R, maka volume dapat dihitung dengan metode irisan sejajar, yaitu:

(i) Sejajar bidang XOZ





$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Menghitung Integral Lipat Dua (Lanjutan)

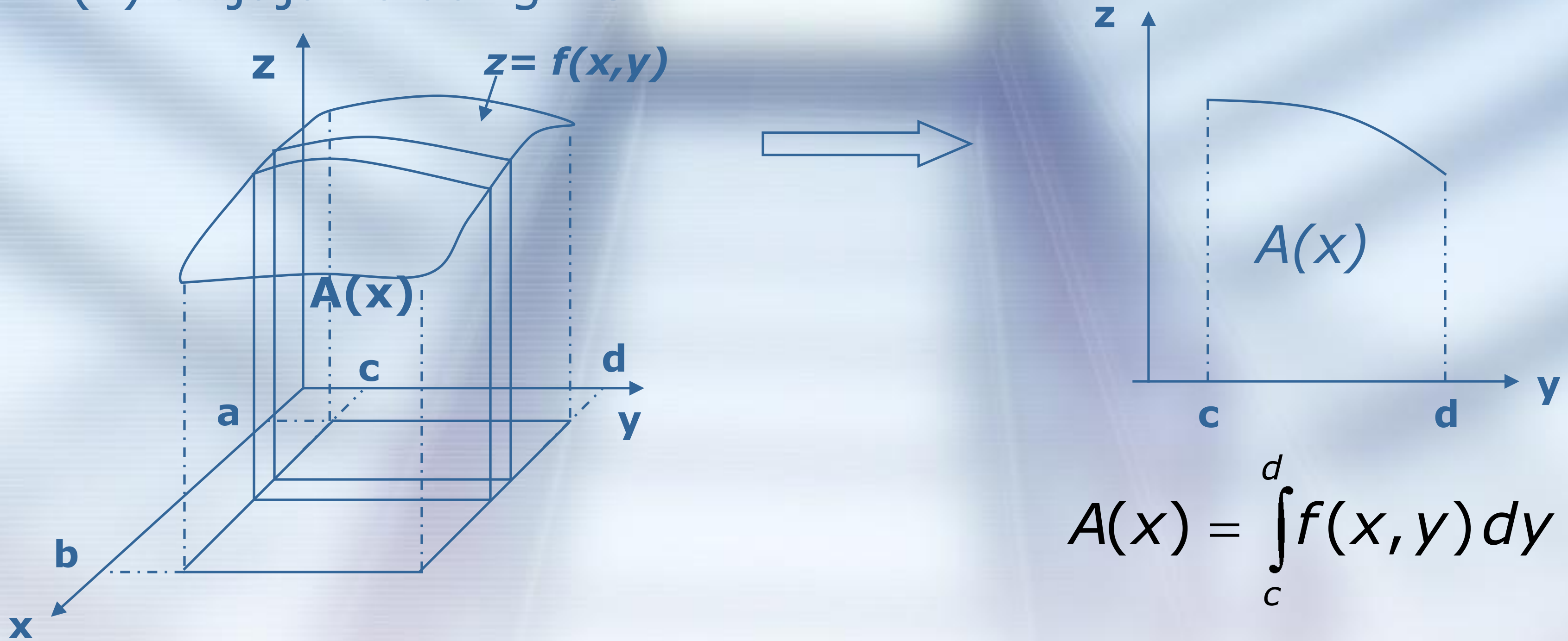
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Menghitung Integral Lipat Dua (lanjutan)

(ii) Sejajar bidang YOZ



$$A(x) = \int_{c}^{d} f(x,y)\,dy$$

Menghitung Integral Lipat Dua (Lanjutan)

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

Contoh

1. Hitung integral lipat dua berikut ini : $\iint_R (x^2 + 2y^2)\,dA$

dimana R = {(x,y) | 0 ≤ x ≤ 6, 0 ≤ y ≤ 4}

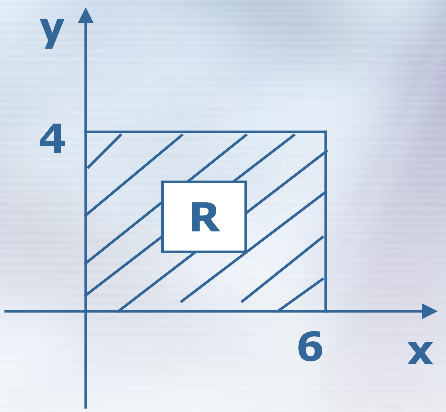
Jawab:

$$\iint_R (x^2 + 2y^2)\,dA = \int_0^6 \int_0^4 (x^2 + 2y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^6 \left(x^2 y + \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^4 \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(4x^2 + \frac{128}{3} \right) dx$$

$$= \frac{4}{3} x^3 + \frac{128}{3} x \Big|_0^6 = 288 + 256 = 544$$



Contoh

Atau,

$$\iint_R \left(x^2 + 2y^2\right) dA = \int_0^4 \int_0^6 \left(x^2 + 2y^2\right) dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{1}{3} x^3 + 2xy^2 \Big|_0^6 \right) dy$$

$$= \int_0^4 \left(72 + 12y^2\right) dy$$

$$= 72x + 4x^3 \Big|_0^4 = 288 + 256 = 544$$

Contoh

2. Hitung integral lipat dua berikut ini : $\iint_R \sin(x+y)\,dA$

dimana R = {(x,y) | 0 ≤ x ≤π/2, 0 ≤ y ≤ π/2}

Jawab:

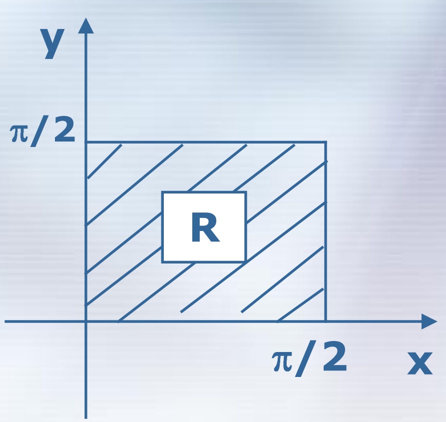
$$\iint_R \sin(x+y)\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(-\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}\right)dx$$

$$= \int_0^{6}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)+\cos(y)\right)dx$$

$$= \sin y\Big|_0^{\pi/2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$



Latihan

1. Hitung

   a. $\int_0^1 \int_0^1 xy\, e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$

   b. $\int_0^2 \int_{-1}^1 (xy)^2\, dy\, dx$

   c. $\int_0^1 \int_0^2 \frac{y}{x^2+1}\, dy\, dx$

2. $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$ untuk fungsi

   a. $f(x,y) = (x + 2y)^2$ dengan R = [-1, 2] x [0, 2]

   b. $f(x,y) = x^2 + y^2$ dengan R = [0, 1] x [0, 1]

   c. $f(x,y) = y^3 \cos^2 x$ dengan R = [-π/2, π] x [1, 2]

Sifat Integral Lipat Dua

Misalkan f(x,y) dan g(x,y) terdefinisi di persegipanjang R

1. $$\iint_R k\,f(x,y)\,dA = k\iint_R f(x,y)\,dA$$

2. $$\iint_R \left[f(x,y)+g(x,y)\right]dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$$

3. Jika R = R_1 + R_2 , maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

4. Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA \leq \iint_R g(x,y)\,dA$$

Integral Lipat Dua atas Daerah Sembarang

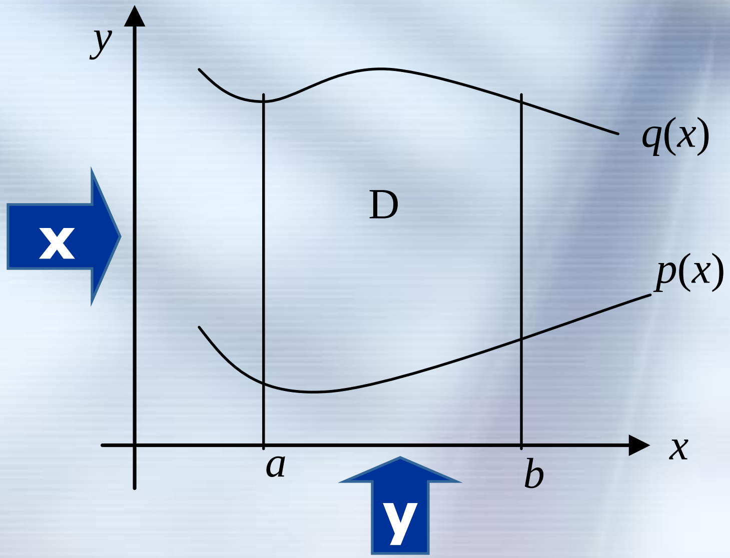
Ada dua tipe

- Tipe I

  $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ p(x) \le y \le q(x)\}$
- Tipe II

  $D = \{(x,y) \mid r(y) \le x \le s(y),\ c \le y \le d\}$

Tipe I

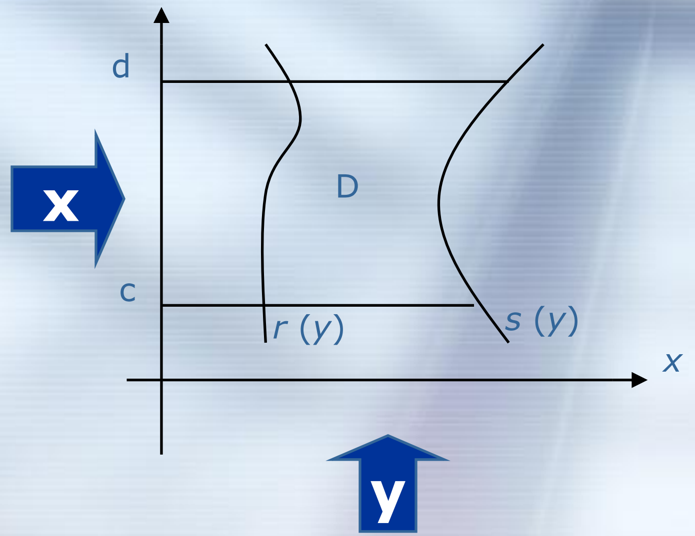


Integral lipat dua pada daerah D dapat dihitung sebagai berikut :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\; dy\; dx$$

D={(x,y)| a≤x≤b, p(x)≤y≤q(x)}

Tipe II



Integral lipat dua pada daerah D dapat dihitung sebagai berikut :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

D={(x,y)|r(y)≤x≤s(y), c≤y≤d}

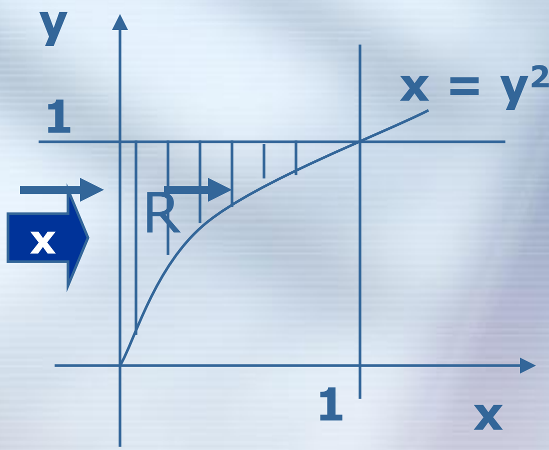
Aturan Integrasi

- Urutan pengintegralan dalam integral lipat dua tergantung dari bentuk D (daerah integrasi).
- Dalam perhitungannya, kadangkala kita perlu merubah **urutan pengintegralan**. Hal ini dapat disebabkan dengan perubahan urutan pengintegralan akan memudahkan dalam proses integrasinya.
- **Oleh karena itu**, langkah pertama kita harus dapat menggambarkan **daerah integrasi**, selanjutnya kita dapat merubah urutan integrasi dengan mengacu pada sketsa daerah integrasi yang sama.

Contoh

1. Hitung $\iint_R (2y\,e^x)\,dA$,R dibatasi x= y^2, y =1, sumbu y

$R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1\}$



$$\iint_R (2y\,e^x)\,dA = \int_0^1 \int_0^{y^2} (2y\,e^x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 2y\,e^x \Big|_0^{y^2} dy$$

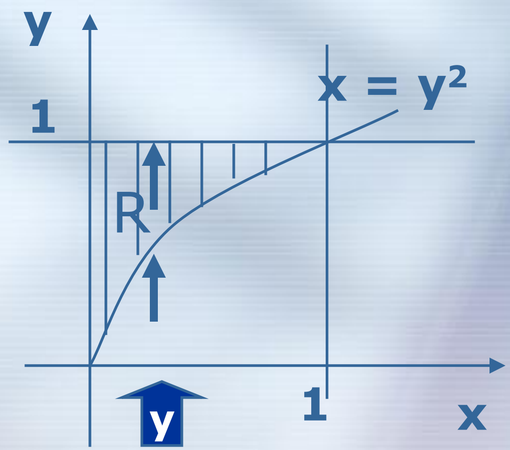
$$= \int_0^1 2y\,(e^{y^2} - 1)\,dy$$

$$= (e^{y^2} - y^2)\Big|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2$$

Contoh

Atau dibalik urutan pengintegralannya, yaitu:

R = {(x,y)| 0 ≤x≤ 1, √x ≤ y ≤ 1}



$$\iint_R \left(2y\, e^x\right) dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \left(2y\, e^x\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 e^x y^2 \Big|_{\sqrt{x}}^1 dx$$

$$= \int_0^1 e^x - xe^x \, dy$$

$$= \left[e^x - xe^x + e^x\right]_0^1$$

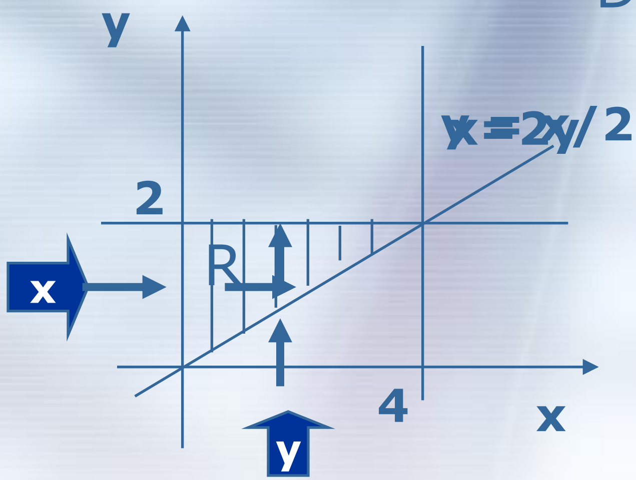
$$= 2e - e - (1+1) = e - 2$$

Contoh

2. $\displaystyle\int_0^4\int_{x/2}^2 e^{y^2}\,dy\,dx$

Jawab:

Daerah integrasinya R = {(x,y)| 0 ≤x≤ 4, x/2 ≤ y ≤ 2}



Diubah urutan pengintegralannya, yaitu:

R = {(x,y)| 0 ≤x≤ 2y, 0 ≤ y ≤ 2}

Sehingga

$$\int_0^4\int_{x/2}^2 e^{y^2}\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{2y} e^{y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 e^{y^2}\,x\Big|_0^{2y}\,dy$$

$$= \int_0^2 2y\,e^{y^2}\,dy$$

$$= e^{y^2}\Big|_0^2 = e^4 - 1$$

Latihan

1. $$\int_{1}^{3}\int_{-y}^{3y} x\,e^{y^3}\,dx\,dy$$

2. $$\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\sin x} y\cos x\,dy\,dx$$

3. $$\int_{0}^{1}\int_{0}^{2} \frac{y}{x^2+1}\,dy\,dx$$

4. $$\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx\,dy$$

5. $$\int_{0}^{1}\int_{x}^{1} e^{-y^2}\,dy\,dx$$

6. $$\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{1} e^{x^3}\,dx\,dy$$

7. $$\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\,dx$$

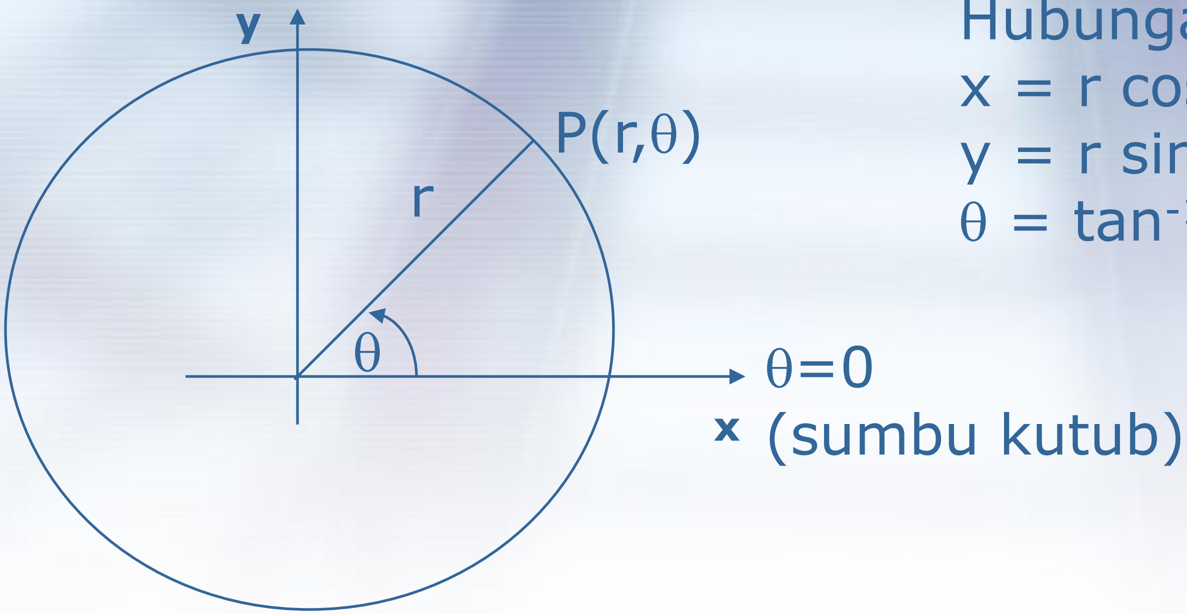
8. $$\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos x} y\sin x\,dy\,dx$$

Integral lipat dalam koordinat kutub/polar

Hitung $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$

Dalam sistem koordinat kartesius, integral ini sulit untuk diselesaikan.

Sistem Koordinat Kutub



Hubungan Kartesius – Kutub

$x = r\cos\theta$ $\quad x^2+y^2=r^2$

$y = r\sin\theta$ $\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$

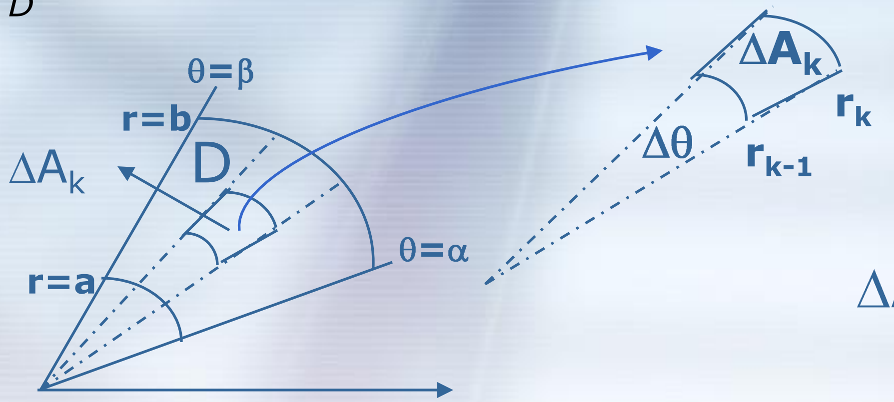
$\theta = \tan^{-1}(y/x)$

Transformasi kartesius ke kutub

Misalkan z = f(x,y) terdefinisi pada persegipanjang kutub D

$D=\{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = ?$$



Sumbu Kutub

Pandang satu partisi persegi panjang kutub ΔA_k

Luas juring lingkaran dengan sudut pusat θ adalah $\frac{1}{2} r^2\theta$

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= \tfrac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta - \tfrac{1}{2} r_{k-1}^2 \Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_k^2 - r_{k-1}^2)\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_k + r_{k-1})(r_k - r_{k-1})\Delta\theta \\ &= r\,\Delta r\,\Delta\theta\end{aligned}$$

Jika $|P| \to 0$, maka $dA = r\,dr\,d\theta$ ($|P|$ panjang diagonal ΔAk)

Transformasi kartesius ke kutub

Sehingga

$$\iint_{D_k} f(x,y)\,dA = \iint_{D_p} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Contoh:

1. Hitung $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2 \le 4\}$

2. Hitung $\iint_D y\,dA$, D adalah daerah di kuadran I di dalam lingkaran $x^2+y^2=4$ dan di luar $x^2+y^2=1$

Contoh

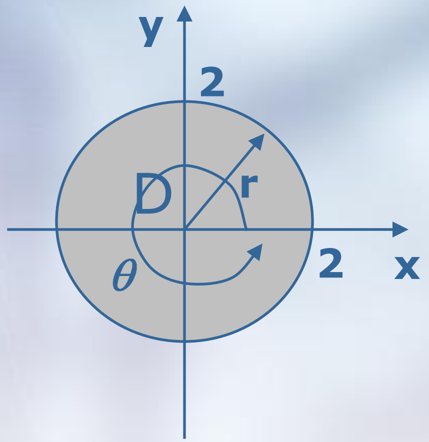
1. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dA$ dengan D = {(x,y)| $x^2+y^2 \le 4$}

Jawab.

D adalah daerah di dalam lingkaran dengan pusat (0,0) jari-jari 2.

D = {(r,θ)| $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$}

Sehingga



$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^2\right)d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \pi\left(e^4 - 1\right)$$

Contoh

2. $\iint\limits_D y\, dA$ dengan D adalah persegipanjang kutub di kuadran I di dalam lingkaran $x^2+y^2=4$ di luar $x^2+y^2=1$

$D = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2,\ \ 0 \le \theta \le \pi/2\}$

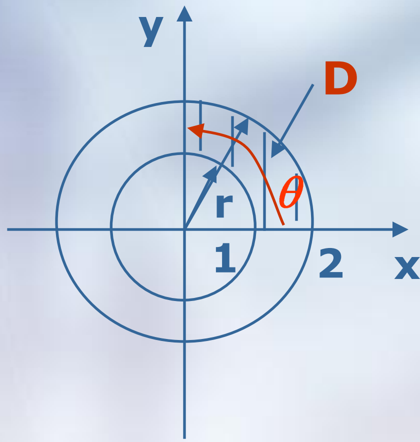
Sehingga

$$\iint\limits_D r\, dA = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r \sin\theta \, r \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_1^2 \right) \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}(8-1)\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{7}{3}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{7}{3}$$



Latihan

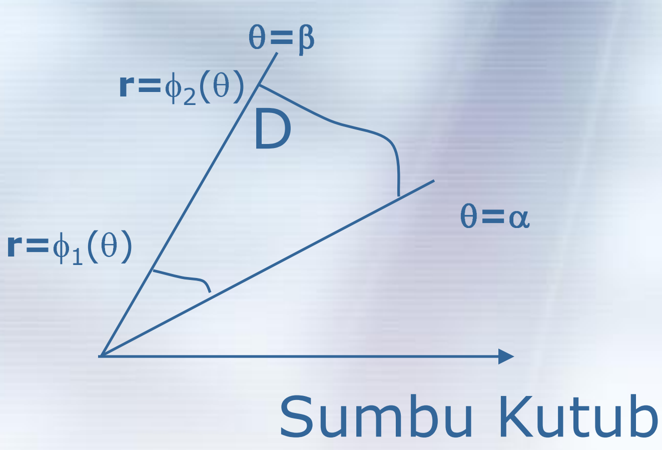
1. Hitung $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\; dy\, dx$

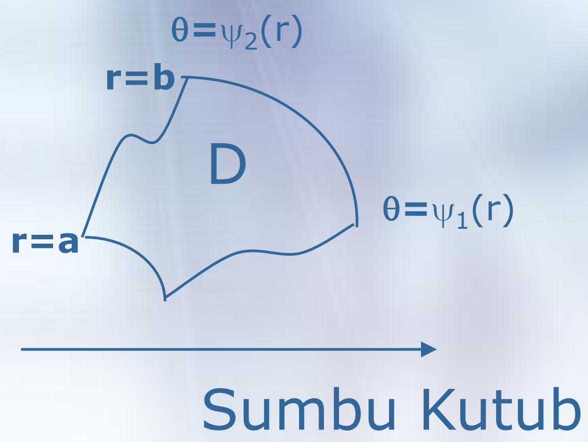
2. Hitung $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2)\; dx\, dy$

3. Tentukan volume benda pejal di oktan I di bawah paraboloid $z = x^2+y^2$ dan di dalam tabung $x^2 + y^2 = 9$ dengan menggunakan koordinat kutub.

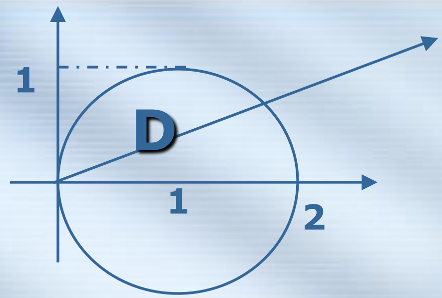
D daerah sembarang/umum

1. $D=\{(r, \theta) \mid \phi_1(\theta) \le r \le \phi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$
2. $D=\{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \psi_1(r) \le \theta \le \psi_2(r)\}$





Tuliskan daerah integrasi dalam koordinat polar



Terlihat bahwa D adalah lingkaran dengan pusat di (1,0) dan berjari-jari 1

Jadi, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 2x$

$r^2 = 2r \cos \theta$

$r^2 - 2r \cos \theta = 0$

$r (r - 2 \cos \theta) = 0$

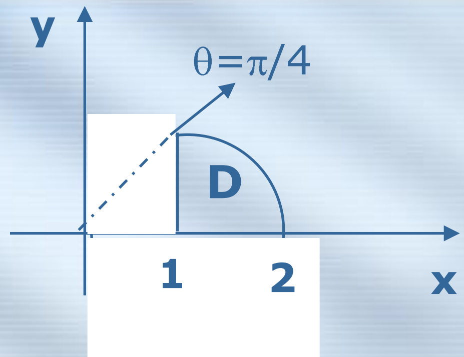
$r = 0$ atau $r = 2 \cos \theta$

Untuk batas θ (dari gambar) $\theta = -\pi/2 \rightarrow \theta = \pi/2$

Sehingga,

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 2 \cos \theta, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\}$$

Tuliskan daerah integrasi dalam koordinat polar



$x = 1 \rightarrow x = 2$

$y = 0 \rightarrow y = \sqrt{2x - x^2}$

$y^2 = 2x - x^2 \longleftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$

$\longleftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

ini merupakan lingkaran pusat (1,0), jari-jari 1

Untuk batas *r* dihitung mulai

$x = 1 \longleftrightarrow r \cos \theta = 1 \longleftrightarrow r = \sec \theta$

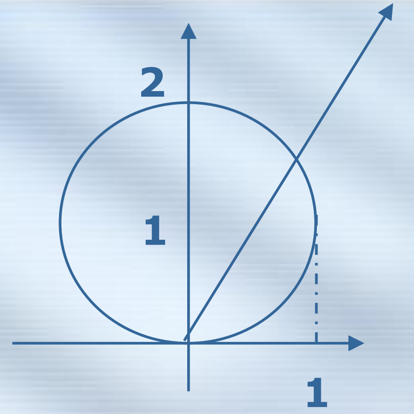
hingga $r = 2 \cos \theta$

Untuk batas θ (dari gambar) $\theta = 0 \rightarrow \theta = \pi/4$

Sehingga koordinat polarnya adalah

$$D = \{(r, \theta) \mid \sec \theta \le r \le 2 \cos \theta, 0 \le \theta \le \pi/4\}$$

Tuliskan daerah integrasi dalam koordinat polar



Terlihat bahwa D adalah lingkaran dengan pusat di (0,1) dan berjari-jari 1

Jadi, $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$x^2 + y^2 = 2y$

$r^2 = 2r \sin \theta$

$r^2 - 2r \sin \theta = 0$

$r (r - 2 \sin \theta) = 0$

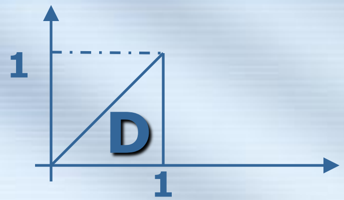
$r = 0$ atau $r = 2 \sin \theta$

Untuk batas θ (dari gambar) $\theta = 0 \rightarrow \theta = \pi$

Sehingga,

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 2 \sin \theta, 0 \le \theta \le \pi\}$$

Tuliskan daerah integrasi dalam koordinat polar



$x = 0 \rightarrow x = 1$

$y = 0 \rightarrow y = x$

Untuk batas r

$x = 1 \longleftrightarrow r\cos\theta = 1 \longleftrightarrow r = \sec\theta$

Untuk batas θ (dari gambar) $\theta = 0 \rightarrow \theta = \pi/4$

Sehingga koordinat polarnya adalah

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le \sec\theta, 0 \le \theta \le \pi/4\}$$

Contoh

1. Hitung $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

Jawab: Dari soal terlihat batas untuk *x* dan *y*:

$x = 1 \rightarrow x = 2$

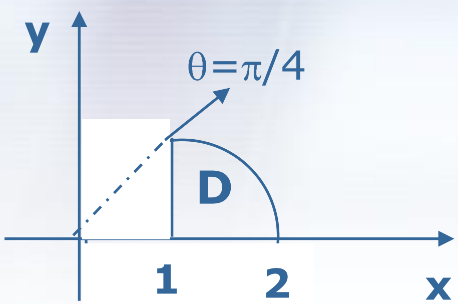
$y = 0 \rightarrow y = \sqrt{2x - x^2}$

$\downarrow$

$y^2 = 2x - x^2 \longleftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$

$\longleftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

ini merupakan lingkaran dengan pusat (1,0), jari-jari 1



Koordinat polarnya adalah

$D=\{(r, \theta) | \sec\theta \le r \le 2\cos\theta, 0 \le \theta \le \pi/4\}$

Contoh (Lanjutan)

Sehingga,

$$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx = \int_0^{\pi/4} \int_{\sec\theta}^{2\cos\theta} \frac{1}{r}.r\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(r\Big|_{\sec\ \theta}^{2\cos\theta} \right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \left(2\cos\theta - \sec\theta\right) d\theta$$

$$= \left(2\sin\theta - \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln\left|\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) - \left(2\sin(0) - \ln\left|\sec(0) + \tan(0)\right|\right)$$

$$= \left(2.\frac{1}{2}\sqrt{2} - \ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right) + \ln(1) = \left(\sqrt{2} - \ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right)$$

Latihan

1. Hitung $\iint_S r\,dr\,d\theta$, S daerah dalam lingkaran r = 4 cosθ dan di luar r = 2

2. Hitung $\int_0^1 \int_x^1 x^2\,dx\,dy$ (dengan koordinat kutub)

3. Hitung $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dA$, D daerah kuadran I dari lingkaran $x^2+y^2=1$ antara $y=0$ dan $y=x$