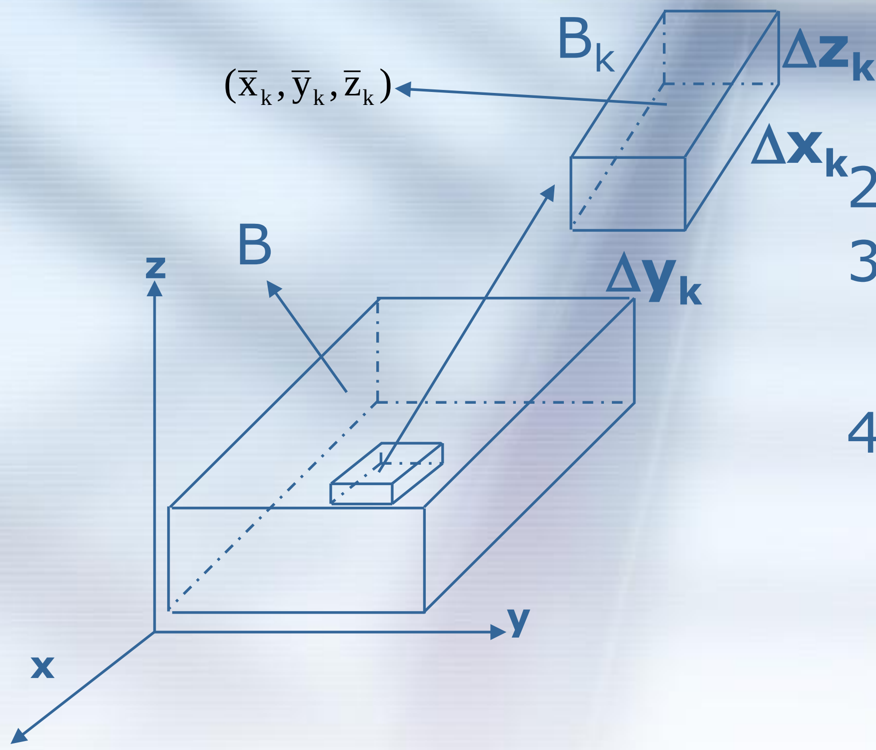
Universitas Indonusa Esa Unggul
Fakultas Ilmu Komputer
Teknik Informatika

Integral Lipat Tiga

Integral Lipat Tiga pada Balok



1. Partisi balok B menjadi n bagian; $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots, B_n$
   Definisikan $||\Delta||$ = diagonal ruang terpanjang dari B_k
2. Ambil $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \in B_k$
3. Bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta V_k$$

4. Jika $||\Delta|| \to 0$ diperoleh limit jumlah Riemann

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta V_k$$

Jika limit ada, maka fungsi w = f(x,y,z) terintegralkan Riemann pada balok B, ditulis

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta V_k$$

Integral Lipat Tiga pada Balok (2)

$\Delta v_k = \Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k \rightarrow dV = dx \; dy \; dz$

Sehingga integral lipat dalam koordinat kartesius:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Contoh

Hitung $\iiint\limits_B x^2yz\ dV$ dengan B adalah balok dengan ukuran

B = {(x,y,z)| 1 ≤ x ≤ 2, 0 ≤ y ≤ 1, 1 ≤ z ≤ 2}

Jawab.

$$\iiint\limits_B x^2yz\ dV = \int_1^2\int_0^1\int_1^2 x^2yz\ dx\,dy\,dz$$

$$= \int_1^2\int_0^1 yz\ \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2\ dy\,dz$$

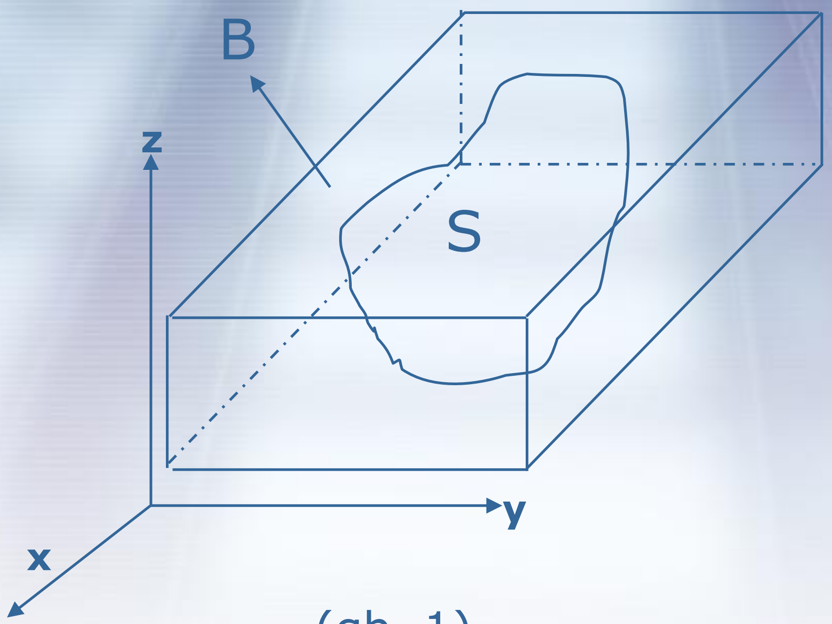
$$= \int_1^2 \frac{7}{3}z\ \left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1\ dz$$

$$= \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{4}$$

Integral Lipat Tiga pada Daerah Sembarang

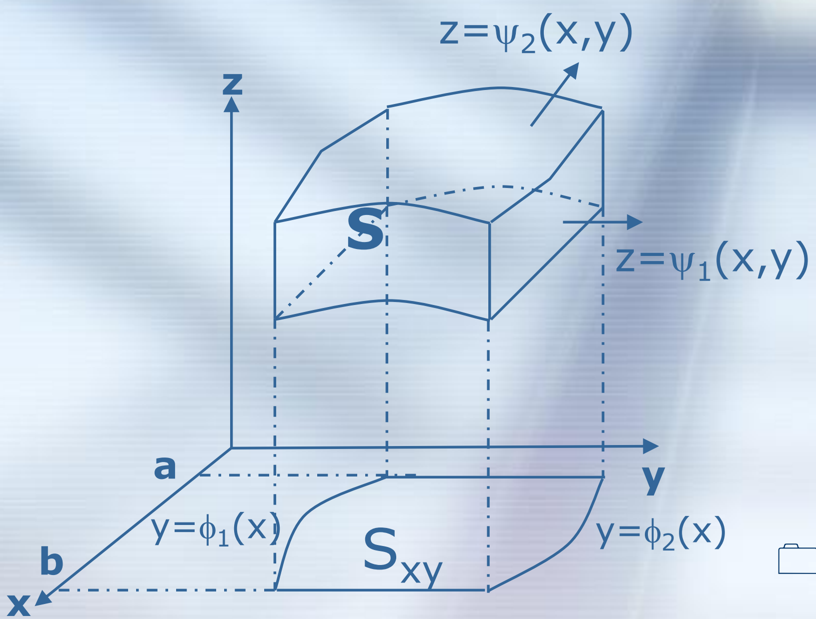
Hitung $\iiint\limits_S x^2yz\,dV$, Jika S benda padat sembarang

- Pandang S benda padat yang terlingkupi oleh balok B, dan definisikan nilai f nol untuk luar S (gb. 1)



(gb. 1)

Integral Lipat Tiga pada Daerah Sembarang (2)



(gb. 2)

- Jika S dipandang sebagai himpunan z sederhana (gb.2) (S dibatasi oleh $z=\psi_1(x,y)$ dan $z=\psi_2(x,y)$, dan proyeksi S pada bidang XOY dipandang sebagai daerah jenis I) maka:

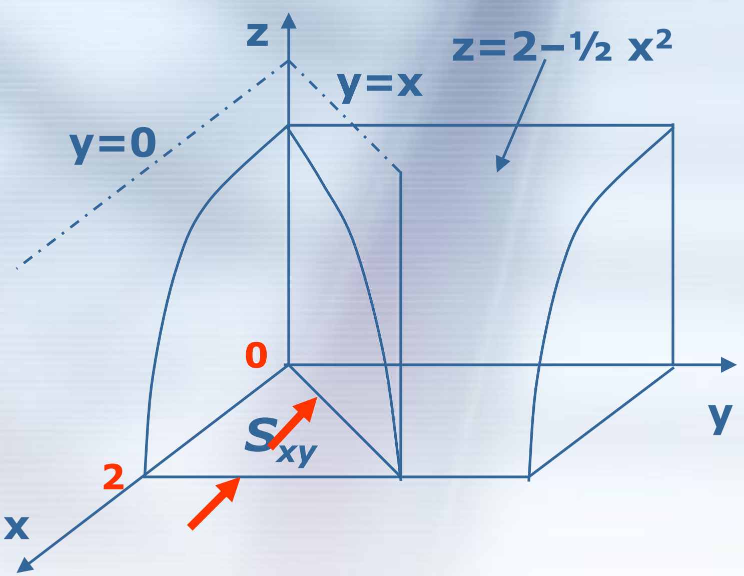
$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

- Catatan:

  Jika f(x,y,z) = 1, maka $\iiint_S f(x,y,z)\,dV$ menyatakan volume benda pejal S

Contoh

Hitung $\iiint_S f(x,y,z)\,dV$ dengan W=f(x,y,z) = 2xyz dan S benda padat yang dibatasi oleh tabung parabola $z=2-\frac{1}{2}x^2$ dan bidang-bidang z = 0, y=x, y=0



S_{xy} = proyeksi S pada XOY (segitiga)

Jawab.

Dari gambar terlihat bahwa

$S=\{(x,y,z)|0\le x\le 2,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le 2-\frac{1}{2}x^2\}$

Sehingga,

$$\iiint_S 2xyz\ dV = \int_0^2\int_0^x\int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} 2xyz\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2\int_0^x xy\ \ z^2\Big|_0^{2-\frac{1}{2}x^2}\,dy\,dx$$

Contoh (lanjutan)

$$= \int_0^2 \int_0^x xy\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)^2 dy\, dx$$

$$= \int_0^2 x\left(4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x^4\right) \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 - x^5 + \frac{1}{8}x^7\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{64}x^8 \Big|_0^2$$

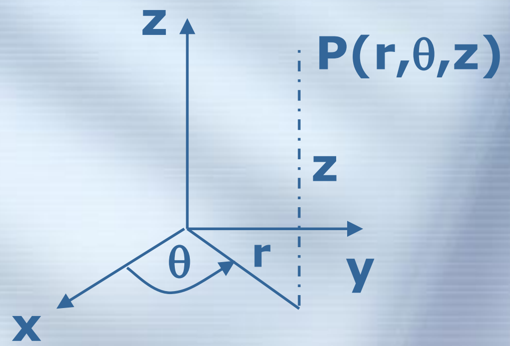
$$= 8 - \frac{32}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

Latihan

1. Hitung $\iiint_S z\, dV$, S benda padat di oktan pertama yang dibatasi oleh bidang-bidang $z = 0$, $x=y$, $y=0$ dan tabung $x^2 + z^2 = 1$.
2. Sketsa benda pejal S di oktan pertama yang dibatasi tabung $y^2 + z^2 = 1$ dan bidang $x = 1$ dan $x = 4$, dan tuliskan dan hitung integral lipatnya.
3. Hitung volume benda pejal yang dibatasi oleh :
   a. $y = x^2$, $y + z = 4$, $x = 0$, $z = 0$.
   b. $1 = z^2+y^2$, $y = x$, $x = 0$.
   c. $x^2 = y$, $z^2 = y$, $y = 1$.
   d. $y = x^2 + 2$, $y = 4$, $z = 0$, $3y - 4z = 0$.
4. Hitung $\int_0^{\pi/2}\int_0^{z}\int_0^{y} \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

Integral Lipat Tiga (Koordinat Tabung dan Bola)

Koordinat Tabung



Syarat & hubungan dg Kartesius

$\mathbf{r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\ \pi}$

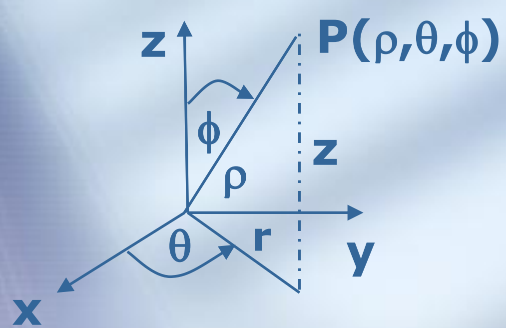
$x = r \cos \theta$

$y = r \sin \theta$

$z = z$

$r^2 = x^2 + y^2$

Koordinat Bola



Syarat & hubungan dg Kartesius

$\rho \geq \mathbf{0},\ \mathbf{0} \leq \theta \leq \mathbf{2}\ \pi,\ \mathbf{0} \leq \phi \leq \pi$

$\left.\begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ r = \rho \sin \phi \end{array}\right\} x = \rho \cos \theta \sin \phi$

$\left.\begin{array}{l} y = r \sin \theta \\ r = \rho \sin \phi \end{array}\right\} y = \rho \sin \theta \sin \phi$

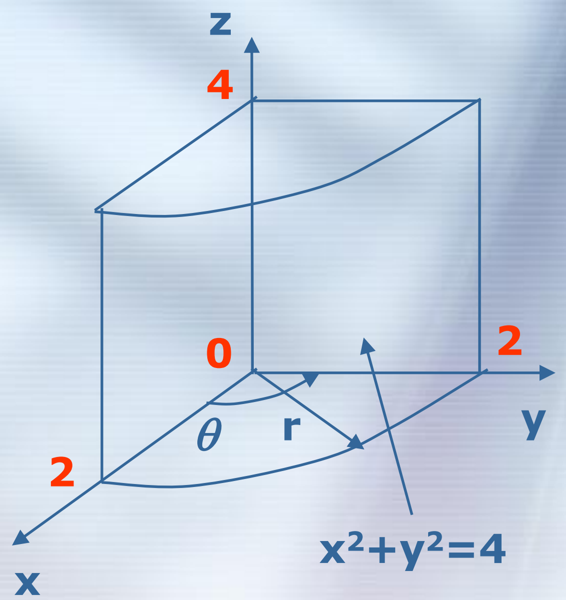
$z = \rho \cos \phi$

$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

Jika D benda pejal punya sumbu simetri → Koordinat Tabung
Jika D benda pejal yang simetri terhadap satu titik → Koordinat Bola

Contoh

1. Sketsa D; D benda pejal di oktan I yang dibatasi oleh tabung $x^2+y^2=4$ dan bidang $z = 0$, $z = 4$



Jawab.

D dalam koordinat:

a. Cartesius:

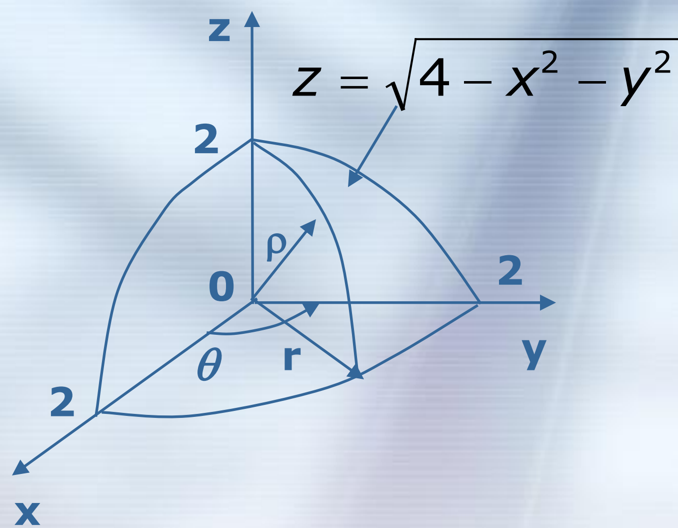
$D=\{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2},\ 0 \le z \le 4\}$

b. Tabung:

$D=\{(x,y,z) \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le z \le 4\}$

Contoh

2. Sketsa D; D bagian bola $x^2+y^2 + z^2=4$ di oktan I.



Jawab.

D dalam koordinat:

a. Cartesius:

$D=\{(x,y,z)|\ 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq \sqrt{4-x^2},$
$0\leq z\leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

b. Tabung:

$D=\{(x,y,z)|\ 0\leq \rho\leq 2,\ 0\leq \phi\leq \pi/2,$
$0\leq \theta \leq \pi/2\}$

Penggantian Peubah dalam Integral Lipat Tiga

Definisi misalkan x=m(u,v,w); y=n(u,v,w); z=p(u,v,w) maka:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_D f(m(u,v,w), n(u,v,w), p(u,v,w))\, \left|J(u,v,w)\right| du\, dv\, dw$$

dimana

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix}$$

Jacobian

Koordinat Kartesius → Tabung

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

Matriks Jacobiannya:

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial z \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial z \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\; r\,dr\,d\theta\,dz}$$

Koordinat Kartesius →Bola

$x = \rho \cos\theta \sin\phi$

$y = \rho \sin\theta \sin\phi$

$z = \rho \cos\phi$

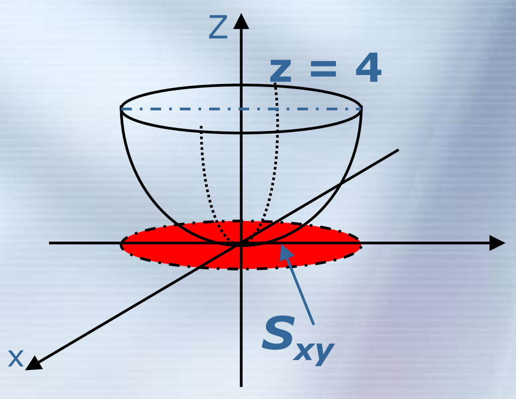
Matriks Jacobiannya:

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial\phi \\ \partial y/\partial\rho & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial\phi \\ \partial z/\partial\rho & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\phi$$

$$\boxed{\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi}$$

Contoh (Tabung)

1. Hitung volume benda pejal yang dibatasi oleh paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4$.



Jawab.

Daerah S dalam Koordinat Cartesius adalah:

$$S=\{(x,y,z)|-2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2},\ x^2 + y^2 \le z \le 4\}$$

Dalam koordinat tabung:

$$S=\{(r,\theta,z)|0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r^2 \le z \le 4\}$$

Sehingga, volume benda pejalnya adalah

$$V = \iiint_S 1\ dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 r\, dz\, d\theta\, dr$$

Contoh (Lanjutan)

$$V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{4} r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\, z\Big|_{r^2}^{4}\, d\theta\, dr$$

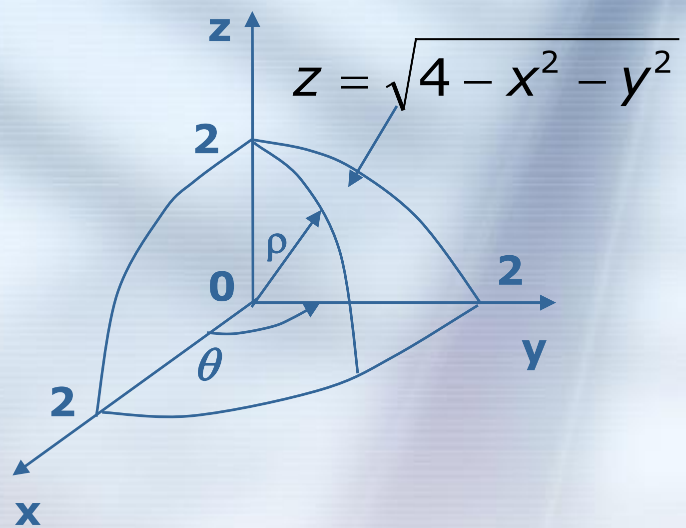
$$= \int_0^2 r\left(4 - r^2\right)\ \theta\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= 2\pi \left(2r^2 - \frac{1}{4} r^4\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi$$

Jadi volume benda pejalnya adalah 8π

Contoh (bola)

2. Hitung volume bola pejal $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ di oktan I



Jawab.

D dalam koordinat:

a. Cartesius:

D={(x,y,z)| $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$, $0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ }

b. Bola:

D={(x,y,z)| $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le \pi/2$}

Sehingga, volume benda pejalnya adalah

$$V = \iiint_S 1 \, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Contoh (Lanjutan)

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin\phi \left(\frac{1}{3} \rho^3 \right) \Bigg|_0^2 d\theta \, dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} (-\cos\phi) \Big|_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{8}{3} (\theta) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} \pi$$

Jadi volume benda pejalnya adalah $4\pi/3$

Contoh

1. Hitung $\iiint_D x^2 \, dV$, dengan D benda pejal yang dibatasi $z = 9 - x^2 - y^2$ dan bidang xy.
2. Hitung volume benda pejal yang di oktan I yang dibatasi bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
3. Hitung volume benda pejal yang di batasi di atas oleh bola $r^2 + z^2 = 5$ dan di bawah $r^2 = 4z$.
4. Hitung volume benda pejal yang dibatasi oleh paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan bidang $z = 4$.
5. Hitung volume benda pejal yang di batasi oleh bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, di bawah oleh bidang $z = 0$ dan secara menyamping oleh tabung $x^2 + y^2 = 4$.

Latihan

6. Hitung volume benda pejal yang di dalam bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, di luar kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan di atas bidang xy.

7. Hitung $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2} dy\, dz\, dx$

8. Hitung $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{2} \sqrt{x^2 + y^2}\; dz\, dy\, dx$

9. Hitung $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4 - x^2 - y^2}\; dy\, dz\, dx$