

## MATERI :

- Menentukan Batas Integral Lipat dua

-

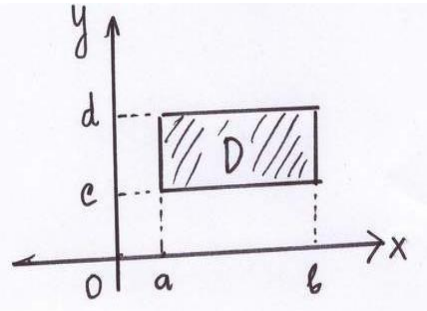
### Menentukan Batas Integral Lipat Dua:

Misalkan diketahui Integral Lipat tiga :  $\iint_D F(x, y) dy dx$

Sedangkan D adalah daerah bidang sebagai batas integral lipat dua .

#### Cara menentukan batas integral lipat dua:

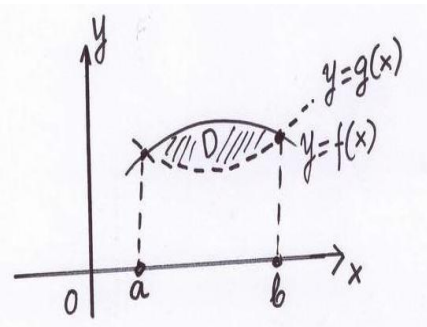
1. Jika D daerah berupa empat persegi panjang seperti gambar berikut:



Maka Integral Lipat tiga :  $\iint_D F(x, y) dy dx = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d F(x, y) dy dx$

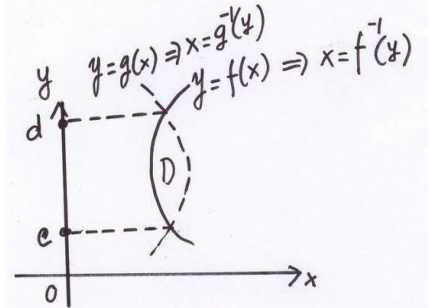
2. Jika D daerah berupa perpotongan kedua kurve  $y = f(x)$  dan  $y = g(x)$  seperti gambar di bawah ini ::

Gambar (a)



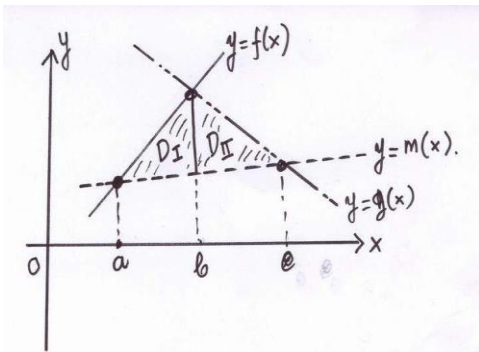
Maka Integral Lipat tiga : 
$$\iint_D F(x, y) dy dx = \int_{x=a}^b \int_{y=f(x)}^{g(x)} F(x, y) dy dx$$

Gambar (b):



Maka Integral Lipat tiga : 
$$\iint_D F(x, y) dy dx = \int_{y=c}^d \int_{x=f^{-1}(y)}^{g^{-1}(y)} F(x, y) dx dy$$

3. Jika D daerah berupa perpotongan kedua kurve  $y = f(x)$  dan  $y = g(x)$  dan  $y = m(x)$  seperti pada gambar berikut::



Maka Integral Lipat tiga : 
$$\iint_D F(x, y) dy dx = \iint_{D_I} F(x, y) dy dx + \iint_{D_{II}} F(x, y) dy dx$$

$$= \int_{x=a}^b \int_{y=m(x)}^{f(x)} F(x, y) dy dx + \int_{x=b}^c \int_{y=m(x)}^{g(x)} F(x, y) dy dx$$

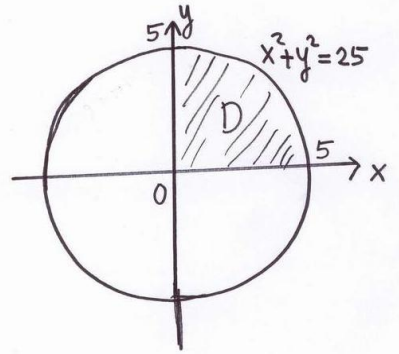
### Contoh-contoh:

Tentukan batas integral lipat dua berikut :

1. Hitunglah integral lipat dua 
$$\iint_D 2xy dy dx$$

Jika D daerah yang dibatasi oleh  $x^2 + y^2 = 25$  di kwadran I.

Jawab:



$$\text{integral lipat dua } \iint_D 2xy dy dx = \int_{x=0}^5 \int_{y=0}^{\sqrt{25-x^2}} 2xy dy dx$$

$$= \int_{x=0}^5 xy^2 \Big|_{y=0}^{\sqrt{25-x^2}} dx$$

$$= \int_{x=0}^5 x(25-x^2) dx$$

$$= \int_{x=0}^5 (25x - x^3) dx$$

$$= \left( \frac{25}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_{x=0}^5$$

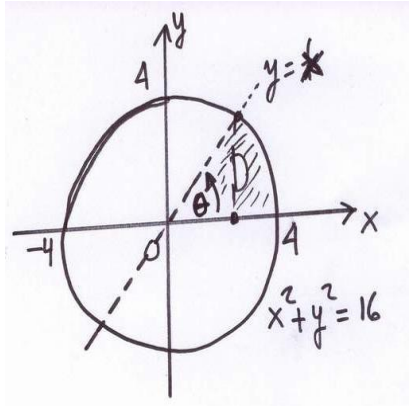
$$= \left( \frac{25}{2} 5^2 - \frac{1}{4} 5^4 \right) - 0$$

$$= \frac{625}{2} - \frac{625}{4} = \frac{625}{4} ///$$

2. Hitunglah integral lipat dua  $\iint_D 8xy dy dx$

Jika D daerah yang dibatasi oleh  $x^2 + y^2 = 16$  dipotong oleh  $y = x$  dan sumbu x di kwadran I.

Jawab:



Perpotongan kedua kurve  $x^2 + y^2 = 16$  dan  $y = x$

$$x^2 + x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \sqrt{8}$$

integral lipat dua  $\iint_D 8xy \, dy \, dx = \int_{x=0}^{\sqrt{8}} \int_{y=0}^x 8 \cdot x \cdot y \, dy \, dx + \int_{x=\sqrt{8}}^4 \int_{y=0}^{\sqrt{16-x^2}} 8 \cdot x \cdot y \, dy \, dx$

$$= \int_{x=0}^{\sqrt{8}} 4xy^2 \Big|_{y=0}^x \, dx + \int_{x=\sqrt{8}}^4 4xy^2 \Big|_{y=0}^{\sqrt{16-x^2}} \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{\sqrt{8}} 4x^3 \, dx + \int_{x=\sqrt{8}}^4 4x(16-x^2) \, dx$$

$$= x^4 \Big|_{x=0}^{\sqrt{8}} + (32x^2 - x^4) \Big|_{x=\sqrt{8}}^4$$

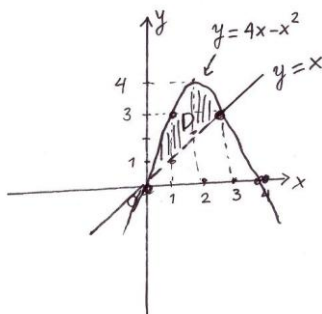
$$= 64 + (512 - 256 - \{256 - 64\})$$

$$= 128 ///$$

3. Hitunglah integral lipat dua  $\iint_D (8x + 2y) \, dy \, dx$

Jika D daerah yang dibatasi oleh  $y = 4x - x^2$  dipotong oleh  $y = x$

Jawab:



$$\begin{aligned}
\text{integral lipat dua } \iint_D (8x + 2y) dy dx &= \int_{x=0}^3 \int_{y=x}^{4x-x^2} 8x + 2y dy dx \\
&= \int_{x=0}^3 [8xy + y^2]_{y=x}^{4x-x^2} dx \\
&= \int_{x=0}^3 \{8x(4x-x^2) + (4x-x^2)^2 - 8x^2 - x^2\} dx \\
&= \int_{x=0}^3 \{32x^2 - x^3 + (16x^2 - 8x^3 + x^4) - 9x^2\} dx \\
&= \int_{x=0}^3 \{39x^2 - 9x^3 + x^4\} dx \\
&= 13x^3 - \frac{9}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \Big|_{x=0}^3 \\
&= 351 - 182,25 + 48,6 = 217,35 //
\end{aligned}$$

### TUGAS:

1. Hitunglah integral lipat dua  $\iint_D (8x + 2y) dy dx$

Jika D daerah yang dibatasi oleh  $y = 6x - x^2$  dipotong oleh  $y = x^2$

2. Hitunglah integral lipat dua  $\iint_D (2xy + 2y) dy dx$

Jika D daerah yang dibatasi oleh  $y = 9 - x^2$  dipotong oleh  $y = x^2 + 1$

Di kwadran I.

3. Hitunglah integral lipat dua  $\iint_D (8xy) dy dx$

Jika D daerah yang dibatasi oleh  $y = 4x - x^2$  dipotong oleh  $y = 2x^2$

4. Hitunglah integral lipat dua  $\iint_D 8xy dy dx$

Jika D daerah yang dibatasi oleh  $(x-4)^2 + y^2 = 16$  dipotong oleh  $y = x$  dan di kwadran I

5. Hitunglah integral lipat dua  $\iint_D 5xy \, dy \, dx$

Jika D daerah yang dibatasi oleh  $x^2 + (y-2)^2 = 4$  di kwadran I

**LINK INTERNAL**

**LINK EKSTERNAL**

**LINK DOKUMEN :**

Murray R. Spigel JR, KALKULUS LANJUTAN, , Erlangga , Jakarta  
1991