MATERI :

Deret bilangan.

DERET BILANGAN:

Deret bilangan bentuk umum $\sum u_n = u_1 + u_{2+} u_{3+} u_{4,\ldots\ldots\ldots\ldots+} u_n \ldots$

u_n = suku umum deret

$S_n = u_1 + u_{2+} u_{3+} u_{4,\ldots\ldots\ldots\ldots+} u_n$ = jumlah n suku pertama deret

Konvergensi Deret

Deret $\sum u_n$ disebut konvergen ke S jika $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *ada.dan.berhingga*

.

Contoh – contoh :

Apakah deret konvergen atau divergen ?

1.). 1 + ½ + $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $S_1 = 1$

   S_2 = 1 + ½ = 1 ½ = 2 – ½

   S_3 = 1 + ½ + $\frac{1}{4}$ = 1$\frac{3}{4}$ = 2 - $\frac{1}{4}$

   S_4 = 1 + ½ + $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ = 1$\frac{7}{8}$ = 2 - $\frac{1}{8}$

   ………………………………………. $S_n = 2 - \frac{1}{n}$

   Karena $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{\infty} = 2 - 0 = = 2$ ➔ jadi deret

   konvergen ke = 2

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$ = 1 + 1 + 1 + 1 + …………….

   $S_n = n$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ ➔ jadi deret divergen

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ = ! – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + …………….

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - 1 = 0$

$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$\lim_{n\to\infty} S_n = tidak.ada$ ➔ jadi deret divergen

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{n(n+1)}\right\} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$U_1 = 1 - ½$

$U_2 = ½ - ⅓$

$U_3 = ⅓ - ¼$

$U_n = 1/n - 1/(n+1)$

____________________ +

$S_n = 1 - 1/n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - 1/n) = 1 - 1/\infty = 1$$

Jadi deret konvergen ke : 1.

Deret – deret Istimewa

1. Deret hitung $\sum_{n=1}^{\infty} 1 + (n-1).b$ deret divergen
2. Deret ukur $\sum_{n=1}^{\infty} a.p^{n-1}$

- Deret konvergen jika $|p| < 1$
- Deret divergen untuk $|p| \geq 1$
- $S_n = \dfrac{a(1-p^n)}{1-p}$

3. Deret hiperharmonis $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^k}$

- Deret konvergen jika $k > 1$
- Deret divergen untuk $k \leq 1$

Ketentuan yang berlaku pada deret :

1. $\sum u_n$ konvergen maka $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ tetapi belum tentu sebaliknya.
2. Jika $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ maka deret $\sum u_n$ divergen
3. Jika $\sum u_n$ konvergen maka $\sum$ **k.**u_n konvergen

   Jika $\sum u_n$ divergen maka $\sum$ **k**u_n divergen
4. Jika $\sum u_n$ dan Jika $\sum v_n$ konvergen, divergen maka $\sum$ **.(**$u_n + v_n$)

   konvergen , divergen

Contoh:

. Deret $\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$

Karena $\lim_{n\to\infty} \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\} = 1$ maka deret $\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ divergen.

Tes konvergen dan divergen deret :

I, Qoutien Test :

Dua buah deret positip $\sum$ u_n dan $\sum$ v_n dengan $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = L$

Maka : Jika L ≠ 0 maka keduanya konvergen atau keduanya divergen

Jika L = 0 dan $\sum$ v_n konvergen maka $\sum$ u_n juga konvergen.

II. Test Liebniz (untuk deret berayun)

Suatu deret berayun $\sum$ u_n konvergen jika memenuhi persyaratan:

1). $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$

2). $| u_{n+1} | < | u_n |$ untuk $n \geq 1$

Catatan : deret berayun yaitu deret dengan suku –suku berganti tanda positip, negatip, positip, negatip dan seterusnya.

III. Test Rasio (d'Alembert Test Ratio)

Jika $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ maka deret $\sum$ u_n

- Konvergen jika L < 1
- Divergen jika L > 1
- Jika L = 1 test gagal jadi harus menggunakan metode test yang lain.

Contoh-contoh :

Selidiki konvergensi deret berikut :

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

Jawab : dengan Qoutien Test :

Ambil deret hiperharmonis $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yang konvergen maka

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n^2}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^{n^2}} = 0$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ juga konvergen ///

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+1}$

Jawab : dengan Qoutien Test :

Ambil deret hiperharmonis $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yang konvergen maka

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n^2+1)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+1}$ juga konvergen///

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+1}$

Jawab : dengan Test Liebniz:

a). $\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2+1} = 0$

b) $|u_{n+1}| = \left|\frac{(-1)^n}{2(n+1)^2+1} = \frac{(-1)^n}{2n^2+4n+2}\right| < |u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{2n^2+1}\right|$ untuk $n \geq 1$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+1}$ juga konvergen///

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^n = -1+4-27+256-\ldots\ldots\ldots\ \ldots$

Maka). | u_{n+1} | < | u_n | untuk n ≥ 1

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^n = -1+4-27+256-..........\ ....$ juga konvergen

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(10)^{2n}}{(2n\ \ +1)!}$

Jawab : dengan Test Rasio

$U_n = \frac{10^{2n}}{(2n+1)!}$ maka $U_{n+1} = \frac{10^{2(n+1)}}{(2(n+1)+1)!} = \frac{10^{2n+2}}{(2n+3)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{10^{2n+2}}{(2n+3)!}\right)/\left(\frac{10^{2n}}{(2n+1)!}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10^{2n+2}}{(2n+3)!}\ \frac{(2n+1)!}{10^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(10)^{2n}}{(2n\ \ +1)!}$ konvergen

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2n^2+1}$

Jawab : dengan Test Rasio

$U_n = \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{(2n^2+1)}$ maka $U_{n+1} = \frac{(\sqrt{5}-1)^{n+1}}{(2(n+1)^2+1)} = \frac{(\sqrt{5}-1)^{n+1}}{(2n^2+4n+3)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{5}-1)^{n+1}}{(2n^2+4n+3)}\right)/\left(\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{(2n^2+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{5}-1)^{n+1}}{(2n^2+4n+3)}\ \frac{2n^2+1}{(\sqrt{5}-1)^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(\sqrt{5}-1)}{(2n^2+4n+3)} \; \frac{2n^2+1}{} \right) = (\sqrt{5} - 1) > 1$$

Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2n^2+1}$ divergen

TUGAS:

Selidiki konvergensi deret berikut :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^4}{2n^3+1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n-9)}{2n^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5)^{2n}}{(n+1)!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{(2n-1)!}$

LINK**INTERNAL**

LINK EKSTERNAL

LINK DOKUMEN :

- Murray R. Spiqel JR, KALKULUS LANJUTAN, , Erlangga , Jakarta 1991
- Purcel,E.J.,” Calculus With Analytic Geometry, Prentice – Hall , Inc., 1994.