MATERI :

- **Ekstrim Fungsi Dua Variabel tidak bersyarat**
- **Ekstrim Fungsi Dua Variabel bersyarat (Lagrange Multiplier)**

Ekstrim Fungsi Dua Variabel tidak bersyarat

Misalkan diketahui Fungsi Dua variable bentuk z = f(x,y) yang kontinu dan diferensiabel , akan ditentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya sserta harga fungsi maksimum atau minimumnya.:

Syarat ekstrim :

$\frac{\partial z}{\partial x}$ = 0 dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ = 0 dari kedua persamaan diperoleh titik kritis (x_0, y_0)

Syarat titik kritis menjadi titik ekstrim jika dipenuhi :

▼di (x_0, y_0) > 0

$$▼ = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

Jika ▼di (x_0, y_0) ≤ 0 maka titik (x_0, y_0) bukan titik ekstrim

Jika (x_0, y_0) merupakan titik ekstrim maka ditentukan jenis ekstrim apakah maksimum atau minimum dengan ketentuan :

- Jika $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ <0 atau $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ < 0 di (x_0, y_0) maka (x_0, y_0) merupakan titik ekstrim maksimum.
- Jika $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ > 0 atau $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ > 0 di (x_0, y_0) maka (x_0, y_0) merupakan titik ekstrim minimum

Harga fungsi maksimum atau minimum yaitu:

$Z_{maks/min}$ = f (x_0, y_0).

Contoh-contoh :

Tentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya serta harga maksimum atau minimum fungsi dus variable berikut :

1. $z = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$

Jawab:

Syarat ekstrim :

$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\,x^2 - 3\,y = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3\,y^2 - 3\,x = 0 \Rightarrow x = y^2$

$3(\,y^2\,)^2 - 3\,y = 0$

$3\,y^4 - 3y = 0 \Rightarrow 3y\,(\,y^3 - 1\,) = 0$

$3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$

$.y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$

Jadi titik kritis (0, 0) dan (1 , 1)

Syarat titik kritis menjadi titik ekstrim jika dipenuhi :

$\blacktriangledown$ di $(x_0, y_0) > 0$

$\blacktriangledown = .\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} .. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2 = 6x.\,6y - (-3)^2$

$\blacktriangledown$ di $(0,0) = 0 - 9 < 0$ jadi titik (0,0) bukan merupakan titik ekstrim

$\blacktriangledown$ di $(1,1) = 6.1.6.1 - 9 > 0$ jadi titik (1,1) merupakan titik ekstrim

jenis ekstrim apakah maksimum atau minimum dengan ketentuan :

$.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ di$(1,1) = 6.\,1 = 6 > 0$ maka (1,1) merupakan titik ekstrim minimum

Harga fungsi minimum :

$Z_{min} = x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 1 + 1 - 3 = -1$///

2. $z = x^3 + 3xy^2 – 15\,x - 12y$

Jawab:

Syarat ekstrim :

$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\,x^2 + 3\,y^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x\,y – 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{y} \Rightarrow (\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0$

$(\left(\frac{4}{y^2}\right) + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4 + y^4 – 5\,y^2 = 0$

. $y^4 - 5\,y^2 + 4 = 0$

$(y^2 – 4)(y^2 – 1) = 0$

$y^2 – 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 2$ dan $y_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 1$ dan $x_2 = -1$

$y^2 – 1 = 0 \Rightarrow y_3 = 1$ dan $y_4 = -1 \Rightarrow x_3 = 2$ dan $x_4 = -2$

Jadi titik-titik kritis : (1,2), (-1, -2), (2,1) dan (-2, -1)

Syarat titik kritis menjadi titik ekstrim jika dipenuhi :

$\blacktriangledown$ di $(x_{0,}\ y_0) > 0$

$\blacktriangledown = .\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}..\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2 = 6x.\ 6x – (6y)^2$

$\blacktriangledown$ di (1,2) = $36 – 36.2^2 < 0$ jadi titik (1,2) bukan merupakan titik ekstrim

$\blacktriangledown$ di (-1,-2) = $36(-1)^2 – 36.(-2)^2 < 0$ jadi titik (-1,-2) bukan merupakan titik ekstrim

$\blacktriangledown$ di (2,1) = $36.2^2 – 36\,(1)^2 > 0$ jadi titik (2,1) merupakan titik ekstrim

$\blacktriangledown$ di (-2,-1) = $36.(-2)^2 – 36\,(-1)^2 > 0$ jadi titik (-2,-1) merupakan titik ekstrim

jenis ekstrim apakah maksimum atau minimum dengan ketentuan :

.$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ di(2,1) = 6. 2 = 12 > 0 maka (2,1) merupakan titik ekstrim minimum

Harga fungsi minimum :

$Z_{min} = x^3 + 3xy^2 – 15 x-12 y$

$= 2^3 + 3. 2. 1^2 – 15(2) – 12(1) = -28$

.$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ di(-2,-1) = 6. -2 = -12 < 0 maka (-2,-1) merupakan titik ekstrim maksimum

Harga fungsi maksimum :

$Z_{maks} = x^3 + 3xy^2 – 15 x-12 y$

$= -2^3 + 3. -2. -1^2 – 15(-2) – 12(-1) = 28$

Ekstrim Fungsi Dua Variabel bersyarat

Misalkan diketahui Fungsi Dua variable bentuk z = f(x,y) yang kontinu dan diferensiabel , akan ditentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya serta harga fungsi maksimum atau minimumnya dengan syarat g(x, y) = c.:

Dengan metode Lagrange Multiplier :

Bentuk fungsi Lagrange : F(x,y, λ) = f(x,y) + λ g(x,y)

Syarat ekstrim :

$\frac{\partial F}{\partial x}$ = 0 dan $\frac{\partial F}{\partial y}$ = 0 dari kedua persamaan diperoleh titik ekstrim (x_0, y_0)

(x_0, y_0) merupakan titik ekstrim maka ditentukan jenis ekstrim apakah maksimum atau minimum dengan ketentuan :

- Jika $.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ <0 atau $.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ < 0 di (x_0, y_0) maka (x_0, y_0) merupakan titik ekstrim maksimum.
- Jika $.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ > 0 atau $.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ > 0 di (x_0, y_0) maka (x_0, y_0) merupakan titik ekstrim minimum

Harga fungsi maksimum atau minimum yaitu:

$Z_{maks/min} = f(x_0, y_0)$.

Contoh-contoh :

Tentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya serta harga maksimum atau minimum fungsi dua'? variable berikut :

1 $z = x^2 + y^2 + xy$ dengan syarat $2x + 3y = 490$

Jawab:

Dengan metode Lagrange Multiplier :

Bentuk fungsi lagrange :

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\ g(x,y)$

$= x^2 + y^2 + xy + \lambda\ (2x + 3y - 490)$

Syarat ekstrim :

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2x - y}{2}$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y + x + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-x - 2y}{3}$

$\lambda = \lambda \Rightarrow \frac{-2x - y}{2} = \frac{-x - 2y}{3}$

$6x+3y = 2x + 4y \Rightarrow y = 4x$

Fungsi syarat : $2x + 3y = 490 \Rightarrow 2x + 3(4x) = 490 \Rightarrow 14x = 490$

Maka x = 35 ➔ y = 4 x = 4 (35) =140

Titik ekstrim (35, 140)

jenis ekstrim apakah maksimum atau minimum dengan ketentuan :

.$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$ > 0 maka (35,140) merupakan titik ekstrim minimum.

Harga fungsi minimum :

$Z_{min} = x^2 + y^2 + xy = (35)^2 + (140)^2 + 35(140)$

$= 1225 + 19600 + 4900 = 25725$///

2 z = $\sqrt{xy}$ dengan syarat 4x + y = 400

Jawab:

Dengan metode Lagrange Multiplier :

Bentuk fungsi lagrange :

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\ g(x,y)$

$= \sqrt{xy} + \lambda\ (4x + y - 400)$

Syarat ekstrim :

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = ½\ x^{-1/2}\ y^{1/2} + 4\ \lambda = 0$ ➔ $\lambda = \frac{-\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}}{4}$

$\frac{\partial F}{\partial x} = ½\ x^{1/2} y^{-1/2} + \lambda = 0$ ➔ $\lambda = -\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}$

$\lambda = \lambda$ ➔ $\frac{-\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}}{4} = -\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}$

.y = 4x

Fungsi syarat : 4x + y = 400➔ 4x + (4x) = 400 ➔ 8x = 400

Maka x = 50 ➔ y = 4 x = 4 (50) =200

Titik ekstrim (50, 200)

jenis ekstrim apakah maksimum atau minimum dengan ketentuan :

$\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -1/4x^{-3/2}\ y^{1/2} = -¼(50)^{-3/2}(200)^{1/2} < 0$ maka (50,200) merupakan titik ekstrim maksimum.

Harga fungsi maksimum :

$Z_{maks} = \sqrt{xy} = \sqrt{50(200)} = 100$//

TUGAS:

Tentukan titik-titik ekstrim dan jenisnya serta harga maksimum atau minimum fungsi dua variable berikut:

1. $z = x^2\ y^2(2x+4y+1)$
2. $z = (x-y)(1-xy)$
3. $z = 3x^3 + 9xy^2 - 45\ x - 36y$
4. $z = x^{0,3}\ y^{0,5}$ dengan syarat $6x + 2y = 384$
5. $z = x^2+y^2$ dengan syarat $3x^2 +4xy+6y^2 = 140$

LINK INTERNAL

LINK EKSTERNAL

LINK DOKUMEN :

Murray R. Spiqel JR, KALKULUS LANJUTAN, , Erlangga , Jakarta 1991