Universitas Indonusa Esa Unggul
Fakultas Ilmu Komputer
Teknik Informatika

Integral Garis

Integral Garis

- Definisi Integral garis
  - Integral garis di bidang

    Misalkan persamaan parameter kurva mulus C (di bidang)

    x=x(t), y=y(t) ; a ≤ *t* ≤ b

    maka

    $$\int_C f(x,y)\,dS = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,dt$$
  - Integral garis di ruang

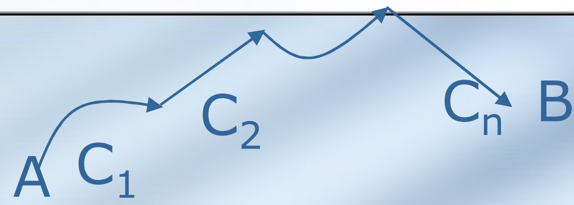
    Misalkan persamaan parameter kurva mulus C (di ruang)

    x=x(t), y=y(t), z=z(t) ; a ≤ *t* ≤ b

    maka

    $$\int_C f(x,y,z)\,dS = \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,dt$$

Sifat-sifat integral garis



1. Jika $C = C_1 U C_2 U \ldots U C_n$, maka

$$\int_{C} f(x,y)\,dS = \int_{C_1} f(x,y)\,dS + \int_{C_2} f(x,y)\,dS + \ldots + \int_{C_n} f(x,y)\,dS$$

2. Jika – C adalah kurva C dengan arah berlawanan denga C, maka

$$\int_{-C} f(x,y)\,dS = -\int_{C} f(x,y)\,dS$$

Contoh

1. Hitung $\int_C \left(x^3 + y\right) dS$, C adalah kurva $x=3t$; $y=t^3$; $0 \le t \le 1$

   Jawab. $x'(t)=3$; $y'(t)=3t^2$

$$\int_C \left(x^3 + y\right) dS = \int_0^1 \left((3t)^3 + t^3\right)\sqrt{3^2 + (3t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 28t^3\sqrt{9 + 9t^4}\, dt$$

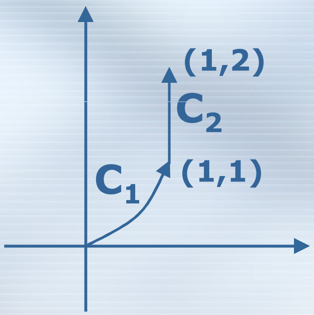
$$= 84\int_0^1 t^3\sqrt{1 + t^4}\, dt$$

$$= 84\left(\frac{1}{6}\left(1 + t^4\right)^{3/2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 14\left(\left(1 + t^4\right)^{3/2}\right)\Bigg|_0^1 = 14\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Contoh

2. Hitung $\int_C (2x)\,dS$, C adalah terdiri dari busur parabola $y=x^2$ dari (0,0) ke (1,1) diikuti oleh ruas garis vertikal dari (1,1) ke (1,2).



Jawab.

Untuk C_1: (0,0) → (1,1) , berupa busur $y = x^2$.

Persamaan parameter C_1:

misalkan $x = t \rightarrow y = t^2$

$$x'(t)=1 \quad y'(t)=2t \qquad 0\leq t \leq 1$$

Sehingga

$$\int_{C_1} (2x)\,dS = \int_0^1 2t\sqrt{1+(2t)^2}\,dt = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

Contoh (Lanjutan)

$$\int_{C_1} (2x)\,dS = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{2}{3}\left(1+4t^2\right)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Untuk C_2: (1,1) → (1,2)

(berupa ruas garis)

Persamaan parameter C_1: misalkan

$x = 1 \rightarrow y = t$

$x'(t)=0 \quad y'(t)=1 \quad 1 \leq t \leq 2$

Sehingga

$$\int_{C_2} (2x)\,dS = \int_1^2 2\sqrt{0+1^2}\,dt$$

$$= 2t\Big|_1^2 = 2(2-1) = 2$$

Jadi,

$$\int_C (2x)\,dS = \int_{C_1} (2x)\,dS + \int_{C_2} (2x)\,dS$$

$$= \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) + 2$$

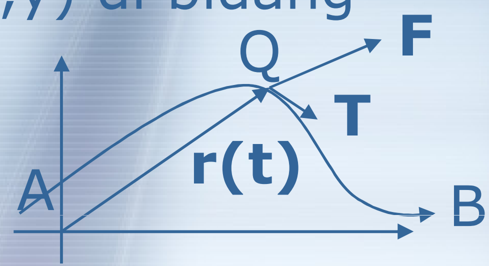
$$= \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}+11\right)$$

Latihan

1. Hitung $\int_C (2+x^2y)\,dS$, C adalah setengah bagian atas lingkaran lingkaran satuan $x^2+y^2=1$
2. Hitung $\int_C (\sin x+\cos y)\,dS$, C adalah ruas garis dari (0,0) ke $(\pi,2\pi)$
3. Hitung $\int_C (2x+9z)\,dS$, C adalah kurva $x=t;\ y=t^2;\ z=t^3;$ $0\le t\le 1$

Kerja

Misalkan $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{i} + N(x,y)\hat{j}$ adalah gaya yang bekerja pada pada suatu titik (x,y) di bidang



Akan dicari: Berapa kerja (W) yang dilakukan oleh gaya **F** untuk memindahkan sebuah partikel menyelusuri kurva C dari A ke B?

Misal $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ adalah vektor posisi Q(x,y)

$\vec{T} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ vektor singgung satuan di Q

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|}$$

Kerja (2)

Maka $\vec{F}.\vec{T} = \|\vec{F}\|\|\vec{T}\|\cos\theta$ adalah komponen singgung **F** di Q

Kerja yang dilakukan oleh **F** untuk memindahkan partikel sejauh Δs adalah

$$\Delta W = \vec{F}.\vec{T}\,\Delta s$$

Kerja yang dilakukan oleh gaya **F** untuk memindahkan partikel dari A ke B adalah

$$W = \int_C \vec{F}.\vec{T}\,ds = \int_C \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\,ds = \int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

diketahui $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} \Rightarrow d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$

Jadi, didapat $W = \int_C \left(M(x,y)\hat{i} + N(x,y)\hat{j}\right).\left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}\right)$

$$= \int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)dy$$

Kerja (3)

Dengan cara yang sama untuk

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\hat{i} + N(x,y,z)\hat{j} + P(x,y,z)\hat{k}$$

gaya yang bekerja pada suatu titik di ruang, maka

$$W = \int_C M(x,y,z)\,dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$$

Contoh

1. Tentukan kerja yang dilakukan oleh medan gaya

$\vec{F}(x,y) = (x^3 - y^3)\hat{i} + x^2 y\,\hat{j}$ dalam memindahkan partikel sepanjang kurva C : x = t^2, $y=t^3$, $-1 \le t \le 0$

Jawab. Kerja yang dilakukan medan gaya ***F*** adalah

$$W = \int_C M\,dx + N\,dy \qquad ; dx = 2t\,dt,\ dy = 3t^2\,dt$$

$$= \int_C \left(x^3 - y^3\right)dx + xy^2\,dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\left(t^2\right)^3 - \left(t^3\right)^3\right)2t\,dt + t^2\left(t^3\right)^2 3t^2 dt$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(2t^7 - 2t^{10} + 3t^{10}\right)dt = \int_{-1}^{0} \left(2t^7 - t^{10}\right)dt = \frac{1}{4}t^8 - \frac{1}{11}t^{11}\Big|_{-1}^{0}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11}\right) = \frac{-7}{44}$$

Contoh

2. Hitung integral garis $\int_C y\,dx + x^2 dy$ dengan kurva C : x = 2t, y=t^2-1 , 0 ≤t≤ 2

Jawab. Kerja yang dilakukan adalah

$$W = \int_C y\,dx + x^2\,dy \qquad ; dx = 2\,dt,\ dy = 2t\,dt$$

$$= \int_0^2 (t^2 - 1)2\,dt + (2t)^2\,2t\ dt$$

$$= \int_0^2 (2t^2 - 2 + 8t^3)\ dt = \left.\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2t^4\right|_0^2 = \frac{16}{3} - 4 + 32$$

$$= \frac{16}{3} + 28 = \frac{100}{3}$$

Latihan

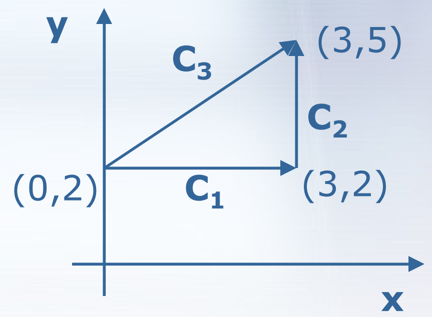
1. Tentukan kerja yang dilakukan oleh medan gaya
$$\vec{F}(x,y,z) = (2x - y)\hat{i} + 2z\,\hat{j} + (y - z)\hat{k}$$
dalam memindahkan partikel sepanjang C, dimana C adalah ruas garis dari (0,0,0) ke (1,1,1)

2. Hitung integral garis $\int_C y\,dx + x^2\,dy$ dengan kurva C adalah ruas garis dari (1,1) ke (3,-1)

3. Hitung $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ dengan $\vec{F} = xy^2\hat{i} + xy^2\hat{j}$ sepanjang

    a. $C = C_1 \cup C_2$

    b. $C = C_3$



Integral Garis Bebas Lintasan

PENDAHULUAN

Hitung $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ dengan $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j}$ atas lintasan

a. C garis y = x dari (0,0) ke (1,1)
b. C garis y = x^2 dari (0,0) ke (1,1)
c. C garis y = x^3 dari (0,0) ke (1,1)

TEOREMA A: DASAR INTEGRAL GARIS

Misalkan $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{i} + N(x,y)\hat{j}$ dengan C adalah kurva mulus sepotong-potong dengan titik pangkal (x_0,y_0) dan titik ujung (x_1,y_1).

Jika $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla}f(x,y)$ maka

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = f(x_1,y_1) - f(x_0,y_0)$$

Integral Garis Bebas Lintasan(2)

Jika $\vec{F}(x,y)=\vec{\nabla}f(x,y)$ maka $\vec{F}$ disebut ***gaya konservatif*** dan disebut ***fungsi potensial*** dari $\vec{F}$

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

Contoh: $\vec{F}=y\hat{i}+x\hat{j}$ dengan C kurva dari (0,0) ke (1,1)

$\vec{F}=y\hat{i}+x\hat{j}=\vec{\nabla}f$ dengan fungsi potensial f = xy

maka $\int_C \vec{F}.d\vec{r}=f(1,1)-f(0,0)=1.1-0.0=1$

Masalah:
Bagaimana mengetahui bahwa **F** konservatif?
(**F**(x,y)=gradien dari suatu fungsi f).
Bagaimana memperoleh f(x,y) jika **F**(x,y) konservatif?

Integral Garis Bebas Lintasan(3)

DEFINISI: Misal $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$

maka $\text{Curl}\,\vec{F} = \text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

TEOREMA B

Misalkan $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ maka $\vec{F}$ konservatif jika dan hanya jika $\text{Curl}\,\vec{F} = \text{rot}\,\vec{F} = 0$ atau jika dan hanya jika

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

Khusus jika $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$ maka $\vec{F}$ konservatif jika dan hanya jika

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Contoh:

1. Diketahui $\vec{F} = 2xy^3\,\hat{i} + \left(1 + 3x^2y^2\right)\hat{j}$

   a. Tunjukkan bahwa **F** konservatif, dan tentukan f

   b. Hitung $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ dengan C sebarang kurva dari (1,4) ke (3,1)

Jawab.

a. (i) $\vec{F}$ Konservatif $\Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\left.\begin{array}{ll} M=2xy^3 \;\Rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y} = 6xy^3 \\ N=1+3x^2y^3 \;\Rightarrow & \dfrac{\partial N}{\partial x} = 6xy^3 \end{array}\right\} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$$

Jadi $\vec{F}$ Konservatif

(ii) $\vec{F} = 2xy^3\,\hat{i} + \left(1 + 3x^2y^2\right)\hat{j} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{j} = \vec{\nabla} f$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$ .... (1) $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2$ .... (2)

Contoh (Lanjutan)

Integralkan (1) terhadap x, diperoleh

$$f(x,y) = \int 2xy^3\,dx$$

$$f(x,y) = x^2y^3 + C(y) \quad \text{.......} \ (3)$$

Turunkan (3) terhadap y, diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + C'(y) \quad \text{.......} \ (4)$$

Dari (2) dan (4), diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + C'(y) = 1 + 3x^2y^2$$

$$C'(y) = 1$$

$$C(y) = y + C$$

Jadi fungsi potensialnya adalah $f(x,y) = x^2y^3 + y + C$

Contoh (Lanjutan)

b. $$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3\,dx + \left(1+3x^2y^2\right)dy$$

$$= f(3,1) - f(1,4) \qquad , f(x,y) = x^2y^3 + y + C$$

$$= \left(3^2.1^3 + 1\right) - \left(1^2.4^3 + 4\right)$$

$$= 10 - 68 = -58$$

Contoh

2. Diketahui $\vec{F}(x,y,z) = (e^{x}\cos y + yz)\hat{i} + (xz - e^{x}\sin y)\hat{j} + xy\,\hat{k}$

a. Tunjukkan bahwa **F** konservatif, dan tentukan f

b. Hitung $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ dengan C sebarang kurva dari (0,0,0) ke (1,0,1)

Jawab.

a. (i) $\vec{F}$ Konservatif $\Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x},\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial z}$

$M = e^{x}\cos y + yz \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -e^{x}\sin y + z \qquad \dfrac{\partial M}{\partial z} = y$

$N = xz - e^{x}\sin y \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -e^{x}\sin y + z \qquad \dfrac{\partial N}{\partial z} = x$

$P = xy \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} = y \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y} = x$

Sehingga diperoleh, bahwa $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x},\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial z}$

Jadi $\vec{F}$ Konservatif

Contoh (lanjutan)

(ii) $\vec{F} = \left(e^x \cos y + yz\right)\hat{i} + \left(xz - e^x \sin y\right)\hat{j} + xy\,\hat{k} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{k} = \vec{\nabla} f$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz$ .... (1) $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y$ .... (2)

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x\,y$ .... (3)

Integralkan (1) terhadap x, diperoleh

$$f(x, y, z) = \int \left(e^x \cos y + yz\right) dx$$

$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + C(y, z)$ .... (4)

Turunkan (4) terhadap y, diperoleh

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + xz + C_y(y, z)$ .... (5)

Contoh (Lanjutan)

Dari (2) dan (5), diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + xz + C_y(y,z) = xz - e^x \sin y$$

$$C_y(y,z) = 0$$

$$C(y,z) = C(z) \quad \text{.......} \ (6)$$

Masukan (6) ke (4), diperoleh

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + C(z) \quad \text{.......} \ (7)$$

Turunkan (7) terhadap z, diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + C'(z) \quad \text{.......} \ (8)$$

Dari (3) dan (8), diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xy + C'(z) = xy$$

$$C'(z) = 0$$

$$C(z) = C \quad \text{.......} \ (9)$$

Contoh (Lanjutan)

Masukan (9) ke (7), diperoleh

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + C$$

Jadi fungsi potensialnya adalah

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + C$$

b. $$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,0,1)} \left(e^x \cos y + yz\right)dx + \left(xz - e^x \sin y\right) dy + xy\, dz$$

$$= f(1,0,1) - f(0,0,0) \quad , \; f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + C$$

$$= \left(e^1 \cos 0 + 1.0.1\right) - \left(e^0 \cos 0 + 0\right)$$

$$= e - 1$$

Penyataan berikut ekivalen

1. $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ untuk suatu f (**F** konservatif)
2. $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ bebas lintasan
3. $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$

Latihan

Tentukan apakah **F** konservatif? Jika ya, tentukan f $\left(\vec{F} = \vec{\nabla} f\right)$

1. $\vec{F} = (10x - 7y)\hat{i} - (7x - 2y)\hat{j}$
2. $\vec{F} = (12x^2 + 3y^2 + 5y)\hat{i} + (6xy - 3y^2 + 5x)\hat{j}$
3. $\vec{F} = (4y^2\cos(xy^2))\hat{i} + (8x\cos(xy^2))\hat{j}$
4. $\vec{F} = (2e^y - ye^x)\hat{i} + (2xe^y - e^x)\hat{j}$
5. $\vec{F} = (2xy + z^2)\hat{i} + x^2\hat{j} + (2xz + \pi\cos\pi z)\hat{k}$

Hitung integral garis berikut:

6. $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$
7. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} (e^x \sin y)dx + (e^x \cos y)dy$
8. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (6xy^3 + 2z^2)dx + (9x^2y^2)dy + (4xz + 1)dz$
9. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(\pi,\pi,0)} (\cos x + 2yz)dx + (\sin y + 2xz)dy + (z + 2xy)dz$
10. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,4)} (yz - e^{-x})dx + (xz + e^y)dy + (xy)dz$
11. $\displaystyle\int_C (3x^2 - 6yz)dx + (2y + 3xz)dy + (1 - 4xyz^2)dz$

C adalah ruas garis dari (0,0,0) ke (1,1,1)

Teorema Green di Bidang

- Misalkan C kurva mulus sepotong-potong, ***tertutup sederhana*** yang membentuk batas dari suatu daerah di bidang XOY. Jika M(x,y) dan N(x,y) kontinu dan mempunyai turunan kontinu pada S dan batasnya C maka

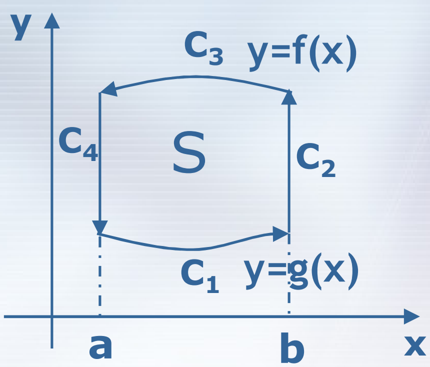
$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

Bukti.

Perhatikan

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

$S = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$



$$\oint_C M\,dx = \int_{C_1} M\,dx + \int_{C_2} M\,dx + \int_{C_3} M\,dx + \int_{C_4} M\,dx$$

$$\oint_C M\,dx = \int_a^b M(x,g(x))\,dx + \int_b^a M(x,f(x))\,dx = -\left[\int_a^b M(x,f(x))\,dx - \int_a^b M(x,g(x))\,dx \right]$$

$$\oint_C M\,dx = -\left[\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dydx \right] = -\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dA$$

Teorema Green di Bidang

Sama halnya dengan memperlakukan S sebagai himpunan x sederhana, kita peroleh

$$\oint_C N\,dy = \iint_S \frac{\partial N}{\partial x}\,dA$$

Sehingga diperoleh

$$\iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_C M\,dx + N\,dy$$

Contoh

Hitung $\oint_C y^2 dx + 4xy dy$ dengan C adalah kurva tertutup yang terdiri dari busur parabola y = x^2 dari titik asal (2,4) dan segmen garis (2,4) ke titik (0,0)

Jawab.

Akan kita coba mengerjakan dengan dua cara, yaitu dengan Integral garis biasa dan teorema Green

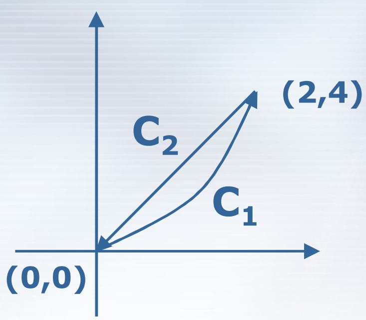
1. Integral garis

Untuk C_1: (0,0) → (2,4) , berupa busur y = x^2.

Persamaan parameter C_1:

misalkan x = t → y = t^2

$x'(t)=1 \quad y'(t)=2t \qquad 0 \le t \le 2$



Sehingga

$$\int_{C_1} y^2 dx + 4xy\ dy = \int_0^2 \left(t^2\right)^2 dt + 4.t.t^2.2t\, dt \ = \int_0^2 \left(t^4 + 8t^4\right) dt$$

Contoh (Lanjutan)

$$= \int_0^2 9t^4 dt = \frac{9}{5}t^5\Big|_0^2 = \frac{288}{5}$$

Untuk C_2: (2,4) → (0,0) (berupa ruas garis)

Persamaan parameter C_2: misalkan

$(x,y) = (2\ ,\ 4) + t\ (0,0)\ -\ (2,4)$

$x = 2 - 2t,\ y = 4 - 4t \quad \Longrightarrow \quad x'(t) = -2\ ,\ y'(t) = -4 \quad 0 \leq t \leq 1$

Sehingga

$$\int_{C_2} y^2 dx + 4xy\ dy = \int_0^1 (4-4t)^2(-2)dt + 4(2-2t)(4-4t)(-4)dt$$

$$= -\int_0^1 \left(160 - 320t + 160t^2\right)dt$$

Contoh (lanjutan)

$$\int_{C_2} y^2dx + 4xy\ dy = -\int_0^1 \left(160 - 320t + 160t^2\right)dt$$

$$= -\left(160t - \frac{320}{2}t^2 + \frac{160}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{160}{3}$$

Jadi,

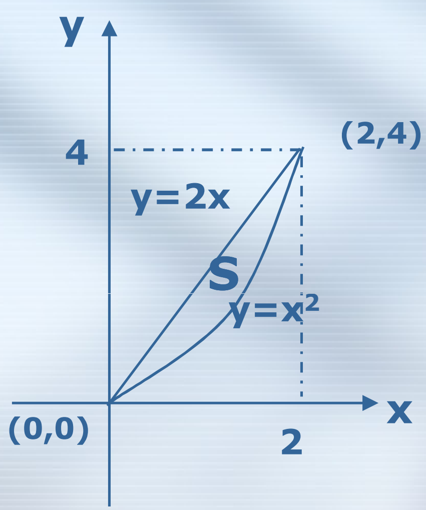
$$\int_{C} y^2dx + 4xy\ dy = \int_{C_1} y^2dx + 4xy\ dy + \int_{C_2} y^2dx + 4xy\ dy$$

$$= \frac{288}{5} - \frac{160}{3}$$

$$= \frac{64}{15}$$

Contoh (Lanjutan)

2. Teorema Green.



$$\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - 2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 y^2 \Big|_{x^2}^{2x} \, dx$$

$$= \int_0^2 4x^2 - x^4 \, dx$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{3} - \frac{32}{5} = \frac{64}{15}$$

Dengan:

$M = y^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$N = 4\,yx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 4y$

$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$

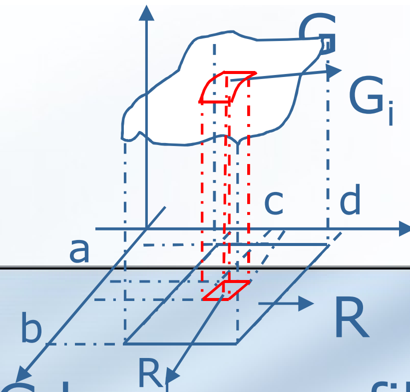
Latihan

1. Tentukan kerja yang dilakukan oleh medan gaya $\vec{F}(x,y) = (\sin x - y)\hat{i} + (e^y - x^2)\hat{j}$ dalam menggerakkan suatu obyek mengitari satu kali $x^2 + y^2 = 4$ dalam arah positif.
2. Hitung $\oint_C 2xy\,dx + y^2 dy$ dengan C kurva tertutup yang terbentuk oleh $y = x/2$ dan $x = y^2$ antara (0,0) dan (4,2)
3. Hitung $\oint_C xy\,dx + (x+y)dy$ dengan C segitiga yg titik-titik sudutnya (0,0), (2,0), dan (0,1)
4. Hitung $\oint_C (e^{3x} + 2y)\,dx + (x^2 + \sin y)\,dy$ dengan C persegipanjang yg titik titik sudutnya (2,1), (6,1), (6,4) dan (2,4)
5. Hitung $\oint_C (x^2 + 4x\,y)\,dx + (2x^2 + 3y)\,dy$ dengan C ellips $9x^2 + 16\,y^2 = 144$

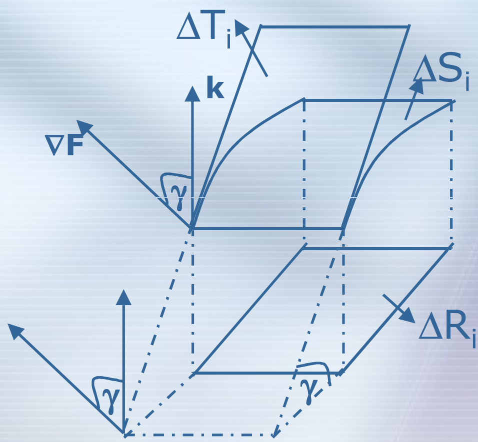
Universitas Indonusa Esa Unggul
Fakultas Ilmu Komputer
Teknik Informatika

Integral Permukaan

Luas Permukaan



- Misalkan diketahui partisi permukaan G berupa grafik $z = f(x,y)$ atau $F(x,y,z) = f(x,y) - z$



$\Delta S_i \sim \Delta T_i = \Delta R_i \sec \gamma_i$

ΔS_i = luas G_i dan ΔR_i = luas $R_i = \Delta x_i \Delta y_i$

ΔT_i = luas bidang singgung yang terletak diatas R_i

γ_i = sudut antara R_i dan T_i

$$\cos\gamma_i = \frac{\left|\vec{\nabla}F.\hat{k}\right|}{\left\|\vec{\nabla}F\right\|\left\|\hat{k}\right\|}, \quad \text{dengan}\,\vec{\nabla}F = f_x\,\hat{i} + f_y\,\hat{j} - \hat{k}$$

$$\cos\gamma_i = \frac{|-1|}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

$$\sec\gamma_i = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

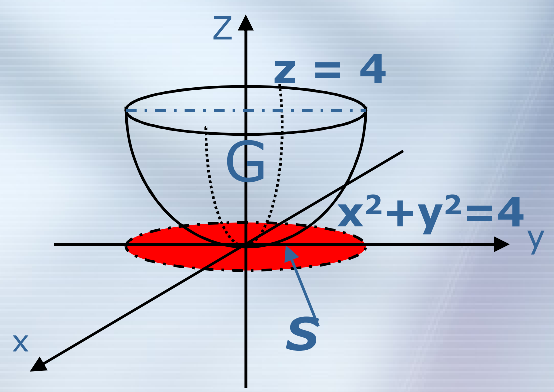
$$\text{Jadi } \Delta S_i = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,\Delta R_i$$

Luas Permukaan G adalah

$$\iint_G dS = \iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dA$$

Contoh

Hitung luas permukaan G : $z = x^2 + y^2$ dibawah bidang $z=4$



Jawab.

Bagian *G* yang dimaksud diproyeksikan pada daerah S (daerah yang dibatasi oleh lingkaran $x^2+y^2=4$).

Misalkan $f(x,y)=x^2+y^2$. Maka didapat $f_x= 2x$, $f_y=2y$

Sehingga luas permukaan G adalah

$$\iint_G dS = \iint_S \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dA = \iint_S \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\ dA$$

dengan $S=\{(x,y) \mid -2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\ \}$

Contoh (Lanjutan)

Dengan koordinat polar, batasan *S* berubah menjadi

$$S=\{(r,\theta)\,|\,0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Jadi

$$\iint_G dS = \iint_S \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\; r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}.\frac{2}{3}\left(4r^2+1\right)^{3/2}\Big|_0^2\, d\theta$$

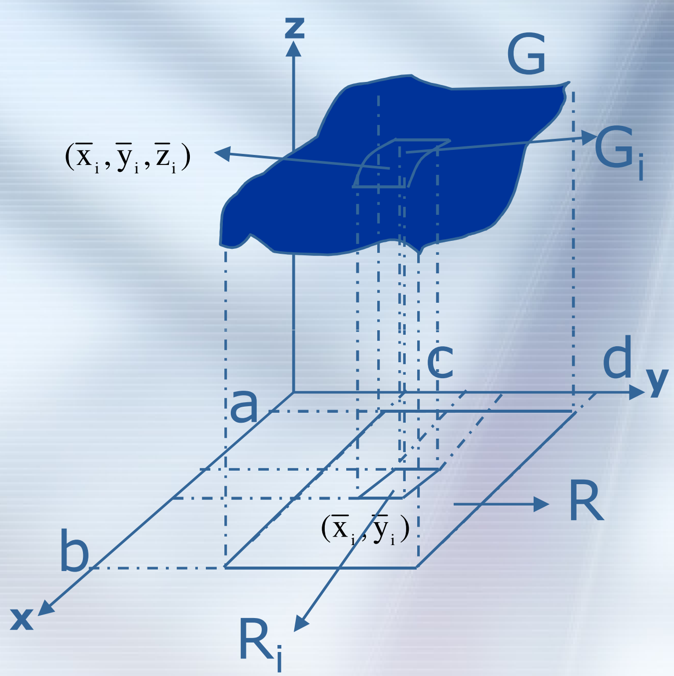
$$= \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right).\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

Latihan Luas Permukaan

1. Hitung luas permukaan G : $z = x^2 + y^2$ dibawah bidang $z = 4$
2. Hitung luas permukaan G : $z = \sqrt{4 - y^2}$ yang tepat berada di atas persegi panjang dengan titik sudut (1,0),(2,0), (2,1),(1,1)
3. Hitung luas permukaan G : silinder $z^2 + x^2 = 16$ di oktan I yang dipotong oleh bidang $x = 2$, $y = 1$, $y = 3$
4. Hitung luas permukaan G : silinder $z^2 + y^2 = 9$ di oktan I antara $y = x$, $y = 3x$

Integral Permukaan

- Misalkan g(x,y,z) terdefinisi pada permukaan G



Misalkan permukaan G berupa grafik z = f(x,y) atau F(x,y,z) = f(x,y) – z

-Misalkan R proyeksi G pada bidang XOY

-Partisi R menjadi n bagian; $R_1, R_2, \ldots, R_n$

-Pilih $(\bar{x}_i,\bar{y}_i) \in R_i$ dan $(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i) \in G_i$

(partisi G yang bersesuaian dgn R)

-Bentuk jumlah riemann

$$\sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)\Delta G_i, \quad \text{dengan } \Delta G_i = \text{luas}\, G_i$$

Integral permukaan dari g atas G adalah

$$\iint_G g(x,y,z)\,dS = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)\Delta G_i$$

atau

$$\iint_G g(x,y,z)\,dS = \iint_R g(x,y,z)\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dA$$

Integral Permukaan (2)

Dengan cara yang sama diperoleh

1. Jika permukaan G berupa grafik x = f(y,z), (y,z)∈ R (Proyeksi G pada bidang YOZ), maka

$$\iint_G g(x,y,z)\,dS = \iint_R g(f(y,z),y,z)\,\sqrt{1+f_y^2+f_z^2}\;dA$$

2. Jika permukaan G berupa grafik y = f(x,z), (x,z)∈ R (Proyeksi G pada bidang XOZ), maka

$$\iint_G g(x,y,z)\,dS = \iint_R g(x,f(x,z),z)\,\sqrt{f_x^2+1+f_z^2}\;dA$$

Contoh

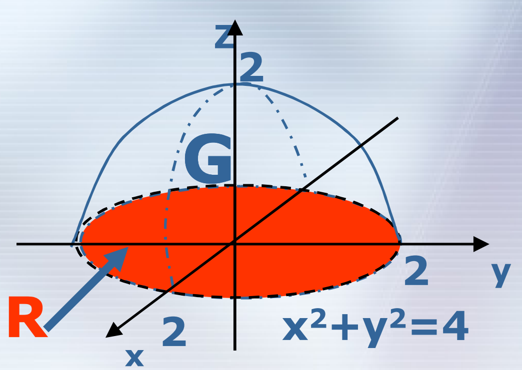
1. Hitung $\iint_G z\,dS$, G adalah permukaan $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Jawab.

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$z^2 + x^2 + y^2 = 4$$

G bagian atas kulit bola dengan jari-jari 2.



R (proyeksi G pada XOY) berupa lingkaran $x^2+y^2=4$.

Kita punya $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, maka

$$f_x = \frac{1}{2}\left(4 - x^2 - y^2\right)^{-1/2} . -2x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$f_y = \frac{1}{2}\left(4 - x^2 - y^2\right)^{-1/2} . -2y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$f_x^{\,2} + f_x^{\,2} + 1 = \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{4 - x^2 - y^2}{4 - x^2 - y^2} = \frac{4}{4 - x^2 - y^2}$$

Contoh (lanjutan)

Jadi

$$\iint_G z\,dS = \iint_R z\sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dA$$
$$= \iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2}\;\sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}}\,dA$$
$$= 2\iint_R dA$$

dimana daerah R={(r,θ)|0 ≤ r ≤ 2, 0≤ $\theta \le 2\pi$ }, sehingga

$$\iint_G z\,dS = 2\iint_R dA$$
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\,dr\,d\theta = 8\pi$$

Latihan Integral Permukaan

1. Hitung $\iint_G x^2 z^2 \, dS$, dengan G bagian kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ di antara z = 1 dan z = 2

2. Hitung $\iint_G g(x,y,z) \, dS$
   a. $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$, dengan G: $z = x+y+1$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$
   b. $g(x,y,z) = x$, dengan G: $x+y+2z = 4$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$
   c. $g(x,y,z) = x+y$, dengan G: $z = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$, $0 \le y \le 1$
   d. $g(x,y,z) = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$, dengan G: $z = x^2 - y^2$, $0 \le x^2 + y^2 \le 1$
   e. $g(x,y,z) = x + y$, dengan G adalah permukaan kubus, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$