

MATERI :

- **Persamaan Diferensial Linier orde satu,**
- **Persamaan Diferensial Bernoulli**
- **Persamaan Diferensial Eksak**

Persamaan Diferensial Linier orde satu

Bentuk Umum :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Penyelesaian umum :

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left\{ \int Q(x).e^{\int P(x)dx} dx + C \right\}$$

Contoh-contoh:

1. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + xy = 3x.$$

Jawab :

penyelesaian umum.

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left\{ \int Q(x).e^{\int P(x)dx} dx + C \right\}$$

$$y = e^{-\int x dx} \int 3x.e^{\int x dx} dx + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left\{ \int 3x.e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C \right\}$$

Catatan Misal $U = x^2$

$$dU = 2x dx$$

$$dx = \frac{dU}{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi} \quad \int_0^1 z \cdot e^{z^2} dz &= \int z \cdot e^U \frac{dU}{2z} \\ &= \int e^U \frac{dU}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^U = \frac{1}{2} e^{z^2} \end{aligned}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{3}{2} e^{z^2} + C \right)$$

$$y = \frac{3}{2} + C e^{-\frac{1}{2}x^2} \rightarrow \text{sebagai penyelesaian persamaan diferensial.}$$

2. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = 3x.$$

Jawab :

penyelesaian umum.

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left\{ \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C \right\}$$

$$y = e^{-\int 2/x dx} \left\{ \int 3x \cdot e^{\int 2/x dx} dx + C \right\}$$

$$y = e^{-2 \ln x} \left\{ \int 3x \cdot e^{2 \ln x} dx + C \right\}$$

$$y = x^{-2} \left(\int 3x(x^2) dx + C \right)$$

$$y = x^{-2} \left(\frac{3}{4} x^4 + C \right) \rightarrow y = \frac{3}{4} x^2 + Cx^{-2} ///$$

- **Persamaan Diferensial Bernoulli**

Bentuk Umum :

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) \cdot y^n$$

Cara Menyelesaikan :

- Dibagi y^n :

$$\frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + P(x) y^{1-n} = Q(x)$$

- Dimisalkan $u = y^{1-n} \rightarrow du = (1-n) y^{-n} dy$

$$\frac{1}{1-n} \frac{du}{dx} = \frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx}$$

- Persamaan diferensial akan menjadi:

$$\frac{1}{1-n} \frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x) \rightarrow \text{PD linier orde satu dalam } u.$$

- Penyelesaian umum :

$$u = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int q(x).e^{\int p(x)dx} dx + C \right\}$$

Dimana $p(x) = (1-n) P(x)$

$$.q(x) = (1-n) Q(x)$$

Contoh-contoh:

1) Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + y = (2-3x) y^4$$

Jawab :

- Dibagi y^4 :

$$\frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} + y^{-3} = (2-3x)$$

- Dimisalkan $u = y^{-3} \rightarrow du = (-3) y^{-4} dy$

$$\frac{1}{-3} \frac{du}{dx} = \frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx}$$

- Persamaan diferensial akan menjadi:

$$\frac{1}{-3} \frac{du}{dx} + u = (2-3x)$$

$$\frac{du}{dx} - 3u = -3(2-3x) \rightarrow \text{PD linier orde satu dalam } u.$$

- Penyelesaian umum :

$$u = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int q(x).e^{\int p(x)dx} dx + C \right\}$$

$$u = e^{-\int -3dx} \left\{ \int (-6 + 9x).e^{\int -3dx} dx + C \right\}$$

$$u = e^{3x} \left\{ \int (-6 + 9x).e^{-3x} dx + C \right\}$$

$$u = e^{3x} \left\{ \frac{-(9x-6)}{3} e^{-3x} - e^{-3x} + C \right\}$$

$$\frac{1}{y^3} = (2 - 3x) - 1 + Ce^{3x}$$

$$\cdot y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 3x + Ce^{3x}}} \quad \text{///}$$

2. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = 3x.y^3$$

Jawab :

- Dibagi y^3 :

$$\frac{1}{y^3} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y^2 = 3x$$

- Dimisalkan $u = y^{-2} \rightarrow du = (-2) y^{-3} dy$

$$\frac{1}{-2} \frac{du}{dx} = \frac{1}{y^3} \frac{dy}{dx}$$

- Persamaan diferensial akan menjadi:

$$\frac{1}{-2} \frac{du}{dx} + \frac{2}{x} u = 3x$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{4}{x} u = -6x \rightarrow \text{PD linier orde satu dalam } u.$$

- Penyelesaian umum :

$$u = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int q(x).e^{\int p(x)dx} dx + C \right\}$$

$$u = e^{-\int \frac{4}{x} dx} \left\{ \int (-9x) e^{\int \frac{4}{x} dx} dx + C \right\}$$

$$u = e^{4 \ln x} \left\{ \int (-9x) e^{-4 \ln x} dx + C \right\}$$

$$u = x^4 \left\{ \int (-9x) x^{-4} dx + C \right\}$$

$$\frac{1}{y^2} = x^4 \left(-\frac{9}{2} x^{-2} + C \right)$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{9}{2} x^2 + Cx^4 \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2} x^2 + Cx^4}} //$$

Persamaan Diferensial Eksak

Bentuk umum :

$$m(x,y) dx + n(x,y) dy = 0$$

Disebut PD Eksak bila dipenuhi $\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$

Cara menyelesaikan :

- D dicari fungsi $F(x,y) = C$ yang memenuhi persamaan diferensial tersebut, maka $\frac{\partial F}{\partial y} dx + \frac{\partial F}{\partial x} dy = 0$
- Maka $\frac{\partial F}{\partial x} = m(x,y)$ dan $\frac{\partial F}{\partial y} = n(x,y)$
- $F(x,y) = \int m(x,y) dx + Q(y)$
- Turunkan terhadap y dan disamakan dengan $n(x,y)$ diperoleh $Q(y)$.
Sehingga diperoleh penyelesaian $F(x,y) = C$.

Contoh-contoh:

1..Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$(2xy - \sin x) dx + x^2 dy = 0$$

Jawab : $m = 2xy - \sin x \rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = 2x$

$n = x^2 \rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = 2x$ Jadi merupakan PD Eksak.

Penyelesaian :

$$F(x,y) = \int (2xy - \sin x) dx + Q(y)$$

$$F(x,y) = x^2 y + \cos x + Q(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = n(x,y) \rightarrow x^2 + 0 + Q'(y) = x^2 \rightarrow Q'(y) = 0 \rightarrow Q(y) = C$$

Jadi $F(x,y) = x^2 y + \cos x = C$ ///

2. 1..Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$(3 + y e^{xy}) dx - (3y - x e^{xy}) dy = 0$$

Jawab : $m = (3 + y e^{xy}) \rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}$

$n = -(3y - x e^{xy}) \rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$ Jadi merupakan PD

Eksak.

Penyelesaian :

$$F(x,y) = \int \{3 + ye^{xy}\} dx + Q(y)$$

$$F(x,y) = 3x + e^{xy} + Q(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = n(x,y) \rightarrow 0 + x e^{xy} + Q'(y) = -(3y - x e^{xy})$$

$$Q'(y) = -3y \rightarrow Q(y) = -3/2 y^2 + C$$

Jadi $F(x,y) = 3x + e^{xy} - 3/2 y^2 = C$ ///

TUGAS:

1. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = 2 \cos 3x.$$

2. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + y = (\cos x - \sin x) y$$

3. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + y = (9x - 3x^2) y^4$$

4. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 + 3ye^{xy}}{6y - 3xe^{xy}}$$

5. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$(x y^2 - x) dx + (y + x^2 y) dy = 0$$

LINK INTERNAL

LINK EKSTERNAL

LINK DOKUMEN :

- Murray R. Spigel JR, KALKULUS LANJUTAN, , Erlangga , Jakarta 1991
- Frank Ayers JR, "Persamaan Diferensial", London Schoum Outline Series ,Mc Graw Hill Book Co., 1994