

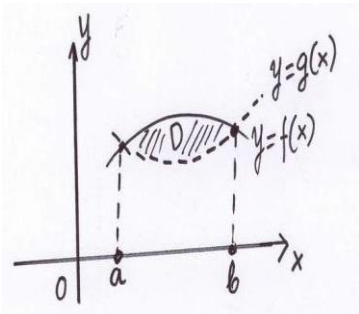
MATERI :

- Penerapan Integral Lipat dua pada Luas daerah, Momen inersia dan titik berat,

Penerapan Integral Lipat dua pada Luas daerah, Momen inersia dan titik berat,

Integral lipat dua dapat digunakan untuk menghitung luas daerah bidang, momen inersia dan titik berat daerah bidang.

Misalkan diketahui daerah D dibatasi oleh kurve $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ seperti berikut :



Maka daerah D dapat ditentukan luas daerah D dengan rumus :

$$\boxed{\text{Luas D} = \iint_D dy \cdot dx}$$

Momen inersia terhadap sumbu koordinat pada daerah D yakni :

- **Momen inersia terhadap sumbu x = I_x**

$$\boxed{I_x = \iint_D \rho y^2 \cdot dy \cdot dx}$$

- **Momen inersia terhadap sumbu y = I_y**

$$\boxed{I_y = \iint_D \rho x^2 \cdot dy \cdot dx}$$

Sedangkan titik berat daerah D yaitu (\bar{x}, \bar{y})

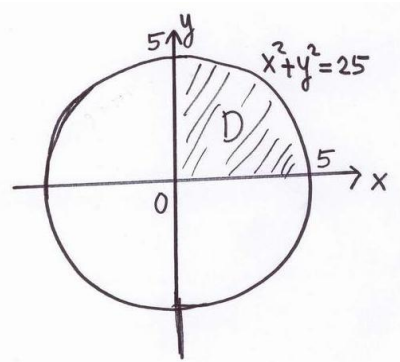
$$\bar{x} = \frac{\iint_D \rho \cdot x \cdot dy \cdot dx}{\iint_D \rho \cdot dy \cdot dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D \rho \cdot y \cdot dy \cdot dx}{\iint_D \rho \cdot dy \cdot dx}$$

Contoh-contoh:

1. Hitunglah luas daerah D yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 25$ di kwadran I.

Jawab:

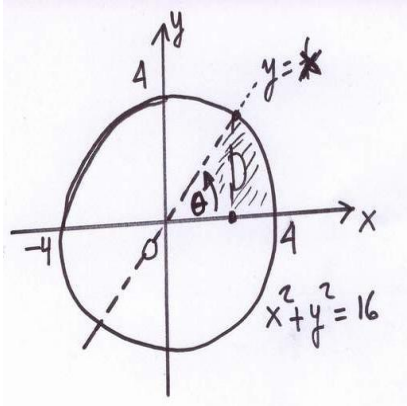


Transformasi ke koordinat Polar :

$$\begin{aligned} \text{Luas daerah D} &= \iint_D dydx = \int_{r=0}^5 \int_{\theta=0}^{\pi/2} r \cdot dr \cdot d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_{r=0}^5 d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} 5^2 \right) d\theta \\ &= \frac{25}{2} (\theta) \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} \end{aligned}$$

2. Hitunglah momen inersia terhadap sumbu x pada daerah D yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 16$ dipotong oleh $y = x$ dan sumbu x di kwadran I.

Jawab:



Transformasi ke koordinat Polar :

$$\text{Momen inersia terhadap sumbu } x = I_x = \iint_D \rho y^2 \cdot dy \cdot dx$$

$$I_x = \int_{r=0}^4 \int_{\theta=0}^{\pi/4} \rho (r \sin \theta)^2 r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= \int_{r=0}^4 \int_{\theta=0}^{\pi/4} \rho r^3 \sin^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

=

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4} \rho \sin^2 \theta \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_{r=0}^4 d\theta$$

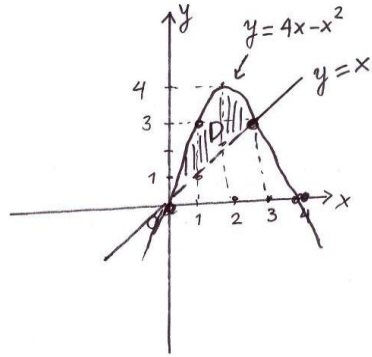
$$= 4^3 \rho \left(-\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\pi/4}$$

$$= 64 \rho \left\{ -\frac{1}{2} \sin \pi/4 \cos \pi/4 + \frac{1}{2} (\pi/4) \right\}$$

$$I_x = \rho \left\{ \frac{\pi}{8} - 32 \right\} //$$

3. Hitunglah titik berat pada daerah D yang dibatasi oleh $y = 4x - x^2$ dipotong oleh $y = x$.

Jawab :



titik berat daerah D yaitu (\bar{x}, \bar{y})

$$\bar{x} = \frac{\iint_D \rho \cdot x \cdot dy \cdot dx}{\iint_D \rho \cdot dy \cdot dx} = \frac{A}{B}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D \rho \cdot y \cdot dy \cdot dx}{\iint_D \rho \cdot dy \cdot dx} = \frac{C}{B}$$

$$A = \iint_D \rho \cdot x \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^3 \int_{y=x}^{4x-x^2} \rho \cdot x \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_{x=0}^3 \rho \cdot x \cdot (y) \Big|_{y=x}^{4x-x^2} dx$$

$$= \int_{x=0}^3 \rho \cdot x \cdot (4x - x^2 - x) dx$$

$$= \int_{x=0}^3 \rho \cdot (3x^2 - x^3) dx$$

$$= \rho \cdot (x^3 - \frac{1}{4}x^4) \Big|_{x=0}^3$$

$$= \rho \cdot (3^3 - \frac{1}{4}3^4)$$

$$= \rho(6,75)$$

$$B = \iint_D \rho \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^3 \int_{y=x}^{4x-x^2} \rho \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^3 \rho \cdot (y) \Big|_{y=x}^{4x-x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x=0}^3 \rho \cdot (4x - x^2 - x) dx \\
&= \int_{x=0}^3 \rho \cdot (3x - x^2) dx \\
&= \rho \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{x=0}^3 \\
&= \rho \left(\frac{3}{2} 3^2 - \frac{1}{3} 3^3 \right) \\
&= \rho(4,5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \iint_D \rho \cdot y \cdot dy \cdot dx = \int_{x=0}^3 \int_{y=x}^{4x-x^2} \rho \cdot y \cdot dy \cdot dx \\
&= \int_{x=0}^3 \rho \cdot \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=x}^{4x-x^2} dx \\
&= \int_{x=0}^3 \rho \cdot \frac{1}{2} \{ (4x - x^2)^2 - x^2 \} dx \\
&= \int_{x=0}^3 \rho \cdot \frac{1}{2} \{ 16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^2 \} dx \\
&= \int_{x=0}^3 \rho \cdot \left[\frac{15}{2} x^2 - 4x^3 + \frac{1}{2} x^4 \right] dx \\
&= \rho \left(\frac{5}{2} x^3 - x^4 + \frac{1}{10} x^5 \right) \Big|_{x=0}^3 \\
&= \rho \left(\frac{5}{2} 3^3 - 3^4 + \frac{1}{10} 3^5 \right) \\
&= \rho(67,5 - 81 + 24,3) \\
&= \mathbf{10,8 \rho}
\end{aligned}$$

titik berat daerah D yaitu $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,5 ; 2,4)$

TUGAS:

1. Hitunglah luas daerah D yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ dipotong oleh $y = x$ dan sumbu y di kwadran I

2. Hitunglah momen inersia terhadap sumbu x pada daerah D yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 9$ di kwadran I
3. Hitunglah momen inersia terhadap sumbu y pada daerah D yang dibatasi oleh $(x-4)^2 + y^2 = 16$ di kwadran I
4. Hitunglah momen inersia terhadap sumbu x pada daerah D yang dibatasi oleh $(x-4)^2 + y^2 = 16$ dipotong oleh $y = x$ dan di kwadran I
5. Hitunglah titik berat pada daerah D yang dibatasi oleh $x^2 + (y-2)^2 = 4$ di kwadran I

LINK INTERNAL

LINK EKSTERNAL

LINK DOKUMEN :

Murray R. Spigel JR, KALKULUS LANJUTAN, , Erlangga , Jakarta
1991