**S1- MATEMATIKA I**

**BAHAN 4**

* **JENIS DAN BENTUK FUNGSI**
* **PERSAMAAN SIMULTAN**

**(SIMULTANEOUS EQUATIONS AND**

**REDUCED FORM EQUATIONS)**

* **AKAR PERSAMAAN ATAU FUNGSI**

 **(ROOTS OF EQUATIONS OR FUNCTIONS)**

**Bahan 4.1.**

**JENIS FUNGSI**

1. **JENIS FUNGSI** **ATAS DASAR**

 **LETAK VARIABEL BEBAS (INDEPENDENT VARIABLES)**

Berdasarkan letak variabel bebas (independent variables), terdapat 2 jenis fungsi sebagai berikut.

1. Fungsi eksplisit (explicit function)

Fungsi eksplisit (explicit function) adalah fungsi dimana (variabel bebas) independent variables berada di sebelah kanan, karena itu independent variables juga disebut right hand variables.

Misal :

* Fungsi : y = f(x)
* Bentuk fungsi explicit : y = x2; y = a + bx; y = 

|  |
| --- |
| Perhatikan terdapat **perbedaan pengertian fungsi dan bentuk fungsi*** Fungsi ditulis dengan dependent variable di sisi kiri, aturan atau the rule fungsi seperti f atau g, serta dalam kurung sejumlah independent variables. Contoh : y = f(x); Y = F(X, Z, W)
* Bentuk fungsi adalah fungsi dalam bentuk detil termasuk :
	+ - Bentuk aturan atau the rule (misal berbentuk fungsi polynomial atau bukan)
		- Variabel bebas (independent variable)
		- Konstan atau bilangan tetap yang berdiri sendiri tanpa diikuti independent variable
		- Koefisien atau bilangan tetap di depan atau diikuti oleh suatu indepedent variable.
		- Parameter yaitu koefisien dalam huruf kecil
 |

* 1. Fungsi implicit (implicit function)

Fungsi implisit (implicit function) adalah fungsi dimana independent variables bersama-sama dependent variable berada di sebelah kiri, sedangkan di kanan angka 0.

Misal :

* Fungsi : g(y,x) = 0
* Bentuk fungsi implicit : ax + b – y = 0; x2 + y2 = 0;

 ey + y – x + ln x = 0; y − mx − b = 0

Catatan :

* Setelah dilakukan penyelesaian (solving), an implicit function bisa diubah menjadi explicit function.

Tetapi tidak semua implicit functions dapat diubah menjadi explicit functions, karena x dan y tidak dapat diperoleh atau the implicit function tidak dapat diselesaikan.

Contoh, the implicit function ey + y – x + ln x = 0 karena x dan y tidak dapat diselesaikan dan diperoleh.

* Sebaliknya, setiap explicit function bisa diubah menjadi an implicit function.

Contoh, explicit function y = 3x4 + 2 sin x -1 diubah menjadi implicit function y - 3x4 + 2 sin x -1 = 0.

* 1. **JENIS FUNGSI ATAS DASAR**

**JUMLAH VARIABEL BEBAS (INDEPENDENT VARIABLES)**

Berdasarkan jumlah variabel bebas (independent variables), di bawah dikemukakan jenis fungsi dengan 1 (satu) hingga 4 (empat) independent variables.

1. Fungsi dengan 1 (satu) variabel bebas (independent variable)

 Misal dengan 1 (satu) independent variabel x, maka penulisan fungsi :

 y = f(x); atau z = g(x)

1. Fungsi dengan multi independent variables
	* + Multi variabel bisa 2 (dua) atau lebih variabel, jadi n variable dimana n ≥ 2.

 Misal :

* Dengan 2 (dua) independent variables z dan w, atau x1 dan x2, maka penulisan fungsi :

 Q = g(z,w) dan

 Y = f(x1, x2)

* Dengan 3 independent variables u, z dan w, atau n variabel xj yaitu x1 hingga xn, maka penulisan fungsi :

 q = g(u,z,w) dan

 y = f(x1, x2, ..., xn)

* 1. **JENIS FUNGSI LAINNYA**

1. The inverse function
2. Homogeneous function dan homothetic function

**Bahan 4.2.**

**BENTUK FUNGSI EKSPLISIT (EXPLICIT FUNCTIONS)**

**DENGAN**

**1 (SATU) VARIABEL BEBAS (INDEPENDENT VARIABLE)**

1. **3 (TIGA) BENTUK FUNGSI**

 **DENGAN 1 (SATU) INDEPENDENT VARIABLE**

1. Fungsi polinomial (polynomial functions)
2. Fungsi rasional (rational functions)
3. *Non algebraic or transcendental functions*
	1. **FUNGSI POLINOMIAL (POLYNOMIAL FUNCTIONS)**
4. Bentuk umum fungsi polynomial (polynomial function)

Fungsi polinomial (polynomial function) mempunyai :

* + Hanya satu jenis independent variable, misal variabel x
	+ Sejumlah atau berbagai term atau factor di sisi kanan :
* Term pertama merupakan bilangan konstan
* Term berikutnya terdiri dari :
	+ Koefisien atau bilangan di depan independent variable
	+ Independent variable dengan pangkat

Bentuk umum polynomial function dengan jumlah term i atau j, sebanyak N (i = 0, 1, 2, …, N) atau M (j = 0, 1, 2, …, M) sebagai berikut :

 Y = f(X) = a0 + a1 X + a2 X2 + a3 X3 + … + aN XN

 z = g(w) = b0 + b1 w + b2 w2 + b3 w3 + … + aM wM

 dimana :

* a0 atau b0 adalah konstan atau bilangan tetap
* a1, a2, ..., aN dan b1, b2, ..., bM masing-masing adalah koefisien
	1. Jenis fungsi polinomial (polynomial function)

Jenis dari fungsi polynomial tergantung dari banyaknya term atau faktor yang dinyatakan oleh pangkat dari independent variable pada term terakhir, sebagai berikut :

* + Untuk i atau j = 0, maka fungsi polynomial merupakan **fungsi konstan (constant functions)**
	+ Untuk i atau j = 1, maka fungsi polynomial merupakan **fungsi linear (linear functions)**
	+ Untuk i atau j = 2, maka fungsi polynomial merupakan **fungsi kuadratik (quadratic functions)**
	+ Untuk i atau j = 3, maka polynomial merupakan **fungsi kubik (cubic functions)**
	+ Untuk i atau j = 4, maka polynomial merupakan **fungsi kuartik (quartic functions)**
		1. Fungsi konstan (constant functions) --- fungsi polinomial pangkat 0 (the zero degree polynomial functions)

Fungsi konstan mempunyai sisi kanan yang terdiri dari konstan dan independent variable berpangkat 0 (nol).

Contoh bentuk fungsi konstan dan diagramnya :

 y = f(x) = 7x0 = 7\*1 = 7

 TFC = g(Q) = 12

 dimana TFC = total biaya (Cost)

 Q = kuantitas produksi (Quantity of production)

 **Diagram 4.2.1.**

 **FUNGSI KONSTAN (CONSTANT FUNCTION)**

 Costs

 12 TFC = f(Q) = 12

 0 Q (Quantity)

* + 1. Fungsi linear (linear functions) --- fungsi polinomial pangkat 1 (the first degree polynomial functions)

Fungsi linear (linear function), yang merupakan fungsi polinomial pangkat 1 (the first degree polynomial function), mempunyai sisi kanan yang terdiri dari konstan atau bilangan tetap, 1 independent variable dengan pangkat 1 beserta koefisien (angka) terkait dengan independent variable dimaksud.

 Contoh bentuk fungsi linear (demand dan supply) dan diagramnya :

* + Fungsi permintaan pasar (market demand (D) function) atau kurva demand (demand curve or D curve, dinyatakan oleh :

*the inverse demand function* : QD = f(P), serta

bentuk fungsi : Q = a − b P atau Q = 5 − 2 P

 dimana :

 Q = kuantitas atau jumlah permintaan (demand)

 P = tingkat harga

 a = parameter (bilangan) yaitu *the intercept* kurva demand

 b = koefisien dari the independent variable P, yang menyatakan rasio perubahan Q (∆Q) terhadap perubahan P (∆P, yaitu (∆Q/∆P) atau slope dari kurva demand yang, se-perti akan dijelaskan kemudian, merupakan derivatif Q terhadap P.

 Tanda pada b harus − (negatif) karena hukum permintaan (the law of demand) yaitu ceteris paribus, apabila P↓ maka Q↑, atau sebaliknya.

* + Fungsi penawaran pasar (market supply (S) function) atau kurva supply (supply curve or S curve), dinyatakan oleh :

 *the inverse supply function* : QS = f(P), serta

 bentuk fungsi : Q = − c + d P atau Q = − 4 + 3 P

 dimana :

 Q = kuantitas atau jumlah penawaran (supply)

 P = tingkat harga

 a = parameter(bilangan) sebagai *the intercept* kurva supply

 b = koefisien dari tne independent variable P, yang menyatakan rasio perubahan Q (∆Q) terhadap perubahan P (∆P), yaitu (∆Q/∆P) atau *tangent* atau *slope* dari kurva demand yang, seperti akan dijelaskan kemudian merupakan derivatif Q terhadap P.

Tanda pada b harus + (positif) karena hukum penawaran (the law of supply) yaitu ceteris paribus, apabila P↑ maka Q↑, atau sebaliknya.

* + Diagram pasar (market diagram) : demand dan supply

**Diagram 4.2.2.**

**PASAR (MARKET)**

 **P (Harga)**

 **S : P = 4/3 + 1/3 Q**

 ∆Q

 Ekuilibrium pasar

 (market equilibrium) a = 5/2 ∆P

 terjadi pada titik

 potong E dimana D=S=7/5 = QE **D : P = 5/2 − 1/2 Q**

 - Q pada D=S

 - P = PE ∆Q

 ∆P

 c/d = 4/3

 0 **Q (Kuantitas)**

 PE = 9/5

 Catatan :

Pada diagram, fungsi D atau kurva D, dan fungsi S atau kurva S, dinyatakan dalam bentuk the inverse function dari fungsi P = g(Q), dimana Q pada sumbu horizontal dan P pada sumbu vertikal, sebagaimana biasanya terdapat pada buku teori ekonomi mikro maupun makro.

* + 1. Fungsi kuadratik (quadratic functions) --- fungsi polinomial pangkat 2 (the second degree polynomial functions)

Fungsi kuadratik (quadratic function), yang merupakan fungsi polinomial pangkat 2 (the second degree polynomial function), mempunyai sisi kanan yang terdiri dari konstan atau bilangan tetap, 2 independent variable masing-masing dengan pangkat 1 dan 2 beserta koefisien (angka) terkait dengan independent variable dimaksud.

Contoh bentuk fungsi kuadratik dan diagramnya :

* Bentuk fungsi : z = g(w) = b0 + b1 w + b2 w2
* Diagram fungsi berupa kurva hill parabola atau valley parabola

**Diagram 4.2.3.**

**FUNGSI KUADRATIK (QUADRATIC FUNCTION)**

 Z Z

 Case of b2< 0 (negative) b0 Case of b2 > 0 (positive)

b0 Hill parabola Valley parabola

0 w 0 w

* + Contoh quadratic function lainnya
* Fungsi biaya : AVC dan MC

AVC = C(Q) = a + b Q + c Q2  *→ Average Variable Costs (AVC)*

 MC = M(Q) = a + 2b Q + 3c Q2 → *Marginal Costs (MC)*

* + - Total Revenue (TR) :
	+ TR = Harga jual P \* Volume jual Q, jadi TR = P\*Q,

 dimana :

 P juga merupakan fungsi dari Q yaitu P = k(Q) yang merupakan an inverse function dari Q = l(P) = a − b P dimana a = 700 dan b = 100, sehingga :

 Q = l(P) = a − b P = 700 − 100 P → berarti :

 P = k(Q) = (a/b) − (1/b) P = 7 − 0,01 Q

* + Maka, TR merupakan fungsi yaitu TR = u(Q), sehingga :

 TR = P\*Q = {(a/b) − (1/b) P}\*Q = {7 − 0,01 Q}\*Q =

 = 7Q − 0,01 Q2

* + - Gambar diagram atau kurva fungsi kuadratik :
			* F(P) = P2 + 4P − 5
			* Q = 4 − 4 P2
			* AVC = C(Q) = a + b Q + c Q2
			* MC = M(Q) = a + 2b Q + 3c Q2
			* TR = 7Q − 0,01 Q2
		1. Fungsi kubik (cubic functions) --- fungsi polinomial pangkat 3 (the third degree polynomial functions)

Fungsi kubik (cubic function), yang merupakan fungsi polinomial pangkat 3 (the third degree polynomial function), mempunyai sisi kanan yang terdiri dari konstan atau bilangan tetap, 3 independent variable masing-masing dengan pangkat 1, 2 dan 3 beserta koefisien (angka) terkait dengan independent variable dimaksud.

Contoh bentuk fungsi kubik (fungsi total biaya atau C) dan diagramnya

* Bentuk fungsi :

 TVC = TVC(Q) = {k0 + k1 Q + k2 Q2 + k3 Q3}

 TC = TVC + TFC

 TC = TC(Q) = {k0 + k1 Q + k2 Q2 + k3 Q3} + TFC

* Diagram fungsi kubik : Total cost function (TC)

**Diagram 4.2.4.**

**FUNGSI TOTAL BIAYA (TOTAL COSTS – TC)**

 C

 TC = TFC (atau konstan) + TVC

 = TFC + {aQ + Q2 + Q3}

 k0 TVC = AVC\*Q

 = (a + Q + Q2)\*Q

 = aQ + Q2 + Q3

 0 Q

* Gambar fungsi kubik dan diagramnya :
* y = x3 − x2 − 4 x + 4
* C = 0,04 Q3 − 0,9 Q2 + 10 Q + 5
1. **FUNGSI RASIONAL (RATIONAL FUNCTIONS)**

Rational function adalah rasio antara dua fungsi di pembilang dan penyebut, seperti di bawah ini.

Bentuk fungsi rasional dan diagramnya : X − 1

* Contoh 1 : Y = f(X) = −−−−−−−−−−−−

 X2 + 2 X + 4

* Contoh 2 : a

 Y = −−− atau XY = a

 X

Fungsi ini berbentuk a rectangular hyperbola seperti pada diagram di bawah, serta banyak digunakan dalam teori ekonomi

**Diagram 4.2.5.**

**FUNGSI HIPERBOLA**

**A RECTANGULAR HYPERBOLA)**

 Y

 a

 Y = −−− atau XY = a

 X

 X

1. ***NON ALGEBRAIC OR TRANSCENDENTAL FUNCTIONS***

Semua fungsi dalam bentuk polynomial, termasuk rational functions, adalah algebaraic functions.

Nonalgebraic functions terdiri dari tiga jenis : (1). Exponential functions; (2). Logarithmic functions; (3). Trigonometric (or circular) functions).

1. Fungsi pangkat atau eksponensial (exponential function)

 Fungsi pangkat (exponential functions) adalah fungsi dimana independent variable menjadi pangkat dengan basis (base) :

 → a real number b atau 8, seperti : y = bx; atau, y = 8x - √x,

atau,

 → an irrational number e = 2,7182828 … (lihat penjelasan di bawah)

Contoh bentuk exponential functions dan diagrammnya :

* Bentuk fungsi dengan base b dan e :

 y = f(t) = bt vs. y = 2bt vs. y = b2 t

 dengan base e (natural exponential functions) e :

y = et atau ditulis y = exp(t)

y = e3t atau y = exp(3t); y = ert atau y = exp(rt)

* Diagram fungsi

**Diagram 4.2.6.**

**FUNGSI EKSPONENSIAL (EXPONENTIAL FUNCTION)**

(Y = bX dan Y = b2X serta Y = 2bX dimana b > 1)

 Y Y

 Y = b2X Y = 2bX Y = bX

 Y = bX

 2Y0

 Y0

 2

 1 Y0

  **1**

 X X

 0 X0 2X0 0 X0

 Latihan : gambar Y = 2X dan Y = 3.22X

**Diagram 4.2.7.**

**FUNGSI EKSPONENSIAL (Y = eX)**

**VS.**

 **FUNGSI LOGARITHMA (LOGARITHMIC FUNCTION) –** (**X = ln Y = loge Y)**

 Y Y

 Y = eX

 X = ln Y = loge Y

 450 450

 0 X 0 X

1. Fungsi logarithma

 x = logb y dari y = bx, atau atau x = ln y dari y = ex

* Pengertian

Logaritma adalah pangkat terhadap basis (base) b atau e untuk memperoleh suatu angka y -- *the logarithm is the power to which a base (b or e) must be raised to attain a particular number (y)* :

 16 = 42 → 2 = log4 16 (the log of 16 to the base of 4)

 Jadi pangkat 2 merupakan logaritma dari 16 dengan basis 4

 y = bt → t = logb y (the log of y to the base of b)

 Jadi pangkat t merupakan logaritma dari y dengan basis b

 y = et → t = loge y = ln y (the log of y to the base of e)

 dan disebut the natural log

 Jadi pangkat t merupakan logaritma dari y dengan basis e

 Misal :

 log10 1000 = log10 103 = 3

 log10 0,01 = log10 10-2 = -2

 ln e3 = loge e3 = 3

 ln 1/e = ln e−1 = −1

 Buktikan :

 ln 10 = 2.3026 dan log10 e = 0.4343

 ln 100 = 4.6052 dan log10 100 = 2

 abx = c --- maka x = 

* Proses memperoleh logarithma

Proses memperoleh logarithma dari logb y atau ln y disebut **taking the log of y to the base b or e**.

Proses sebaliknya yaitu memperoleh y dari suatu nilai atau angka dari logarithma logb y atau ln y disebut **taking the antilog of logb y atau ln y**.

* Seperti terlihat pada Diagram 4.2.6 dan 4.2.7 di atas, fungsi y = bx atau y = ex adalah sepenuhnya naik ke atas (strictly increasing) dengan b atau e > 1.

Ini berarti untuk setiap angka positif y terdapat satu pangkat x (a unique exponent, bisa positif atau negative) sehingga y = bx atau y = ex.

Pernyataan itu menyatakan *the strict monotonicity of the exponential function* yang berarti bahwa setiap angka positif y memiliki suatu logarithma (a unique logarithm) t terhadap base b atau e > 1 sehingga semakin besar angka y maka semakin besar logarithmanya.

* Pengertian angka irasional (an irrational number) e

|  |
| --- |
| e = 2,7182828… adalah limit dari fungsi :e = lim f(m) = lim (1 + 1/m)m m → ∞ m → ∞m adalah angka atau bilangan riil (real numbers)Apabila m bertambah besar hingga tak terhingga (∞), maka nilai dari fungsi e itu mencapai angka e = 2,7182828, yaitu :f(1) = (1 + 1/1)1 = 2f(2) = (1 + 1/2)2 = 2,25f(3) = (1 + 1/3)3 = 2.37037…f(4) = (1 + 1/4)4 = 2,44141… . . . lim f(m) = lim (1 + 1/m)m = e = 2,7182828  m → ∞ m → ∞Pembuktian e = 2,7182828 didasarkan atas seri Maclaurin (the Maclaurin series) dari fungsi :  Φ(X) = eX, yaitu :  eX = 1 + X + 1/2! X2  + 1/3! X2 + … + 1/n! X2 + Rn dimana Rn → 0 apabila n → ∞  dan pada x = 1, maka e = 2, 7182819 |

1. Log rules :

Rule 1 : ln(uv) = ln u + ln v ; u dan v ada;ah fungsi

 Misal :

 ln Ae6e4 = ln A + ln e6 + ln e4

Rule 2 : ln(u/v) = ln u – ln v

Rule 3 : ln ua = a ln u

Rule 4 : logb u = (logb e) (loge u)

Rule 5 : t = logb y = (logb e) (loge y)

 = (1/loge b) (loge y)

 = (ln y)/(ln b)

Rule 6 : logb e = 1/loge b = 1/ln b

Rule 7 : blogby = y

 eln y = y

1. ***TRIGONOMETRIC (CIRCULAR) FUNCTIONS***

Fungsi yang berkaitan dengan circle dan triangles ((lihat **C&W (Book 4) Ch. 16 hal. 513-519**).

**Bahan 4.3.**

**BENTUK FUNGSI EKSPLISIT (EXPLICIT FUNCTIONS)**

**DAN FUNGSI IMPLISIT (IMPLISIT FUNCTIONS)**

**DENGAN**

**2 (DUA) VARIABEL BEBAS (INDEPENDENT VARIABLES)**

1. **FUNGSI (EKSPLISIT) DENGAN 2 (DUA) INDEPENDENT VARIABLES, SERTA DIAGRAMNYA**

Fungsi dengan 2 independent variables, misal z = g(x,y) mempunyai diagram dalam 3 dimensi, yaitu 2 sisi untuk independent variables x dan y, 1 sisi untuk dependent variable z, jadi fungsi berada dalam satu ruangan.

 **Diagram 4.3.2. Diagram 4.3.1.**

 **FUNGSI z = g(x,y) FUNGSI z = g(x,y)**

 **DALAM 2 (DUA) DIMENSI DALAM 3 (TIGA) DIMENSI**

y z y

 (x1, y1, z1) (x2, y2, z2)

 (x3, y3, z3)

 ●(x1, y1) y2

 y1,y3 ●

 ●(x2, y2) ●

 0

 z2 x1 ●

 z1 x2

 seperti fungsi hyperbola x3

 pada Diagram 4.2.5 di atas

0 x x

Catatan atas Diagram 4.3.1. dan 4.3.2. di atas :

1. Fungsi dengan 3 dimensi x, y, z pada Diagram 4.3.1. merupakan kurva dalam ruangan.
2. Tetapi dalam 2 dimensi, fungsi dengan variabel x, y dan z itu diwakili atau dinyatakan oleh perpotongannya dengan bidang x-y (2 dimensi) yang berbentuk hyperbola seperti pada Diagram 4.3.2., dimana :
	* + - Setiap kurva hyperbola menyatakan kurva dependent variable z :
* Cekung (**convex**) terhadap titik pusat 0 dari sumbu (variabel) x dan sumbu (variabel) y.

Levelnya dinyatakan dalam angka atau bilangan.

Didefinisikan, misalnya untuk :

* + - * + Kurva z1, sebagai suatu kurva atau *locus* dari semua titik kombinasi x dan y, termasuk (x1,y1), yang mempunyai level setingkat z1.
				+ Kurva z2 merupakan kurva atau locus dari semua titik kombinasi x dan y, termasuk (x2,y2), yang memberikan atau menghasilkan tingkat kurva z2.
* Syarat kurva z1 dan z2, serta kurva lainnya baik di bawah kurva z1 dan di atas kurva z2, adalah fungsi z = g(x,y) yang merupakan :
* *A strictly quasi-concave function* untuk kurva z yang *strictly convex* terhadap titik 0 atau *origin*.
* Atau, *a quasi-concave function* untuk kurva z yang *convex* terhadap titik 0 atau *origin*.
	+ Karena fungsi z = g (x,y) quasi concave, maka setiap kurva z (z1, z2, dstnya) berbentuk cekung (convex) terhadap titik pusat 0 dari sumbu x dan y, sehingga berarti sepanjang kurva z (z1, z2, dstnya), maka :

|  |
| --- |
| Slope dari setiap kurva z menurun, atau dengan kata lain, marjinal substitusi (marginal rate of substitution (MRS) atau marginal rate of technical substitution (MRTS)) yang menurun. Artinya, penggantian atau pertukaran 1 (satu) unit variabel y menuntut variabel x semakin banyak. Jadi, variabel y semakin mahal, sedangkan variabel x semakin murah. Atau sebliknya. Substitusi itu, dalam teori permintaan (demand) disebut *the law of diminishing marginal rate of substitution* (MRS) sepenjang an indifference curve. Sedangkan dalam teori produksi, disebut *the law of diminishing marginal rate of technical substitution* (MRTS) sepenjang an isoquant.  |

1. **FUNGSI (EKSPLISIT) DENGAN 2 (DUA) INDEPENDENT VARIABLES DIMANA *SALAH SATU TETAP*, SERTA DIAGRAMNYA**
	1. Fungsi dengan 2 independent variables z = g(x, y), tetapi salah satu variabel misal variabel x adalah tetap (fixed) pada xf, sehingga fungsi menjadi :

 z = g(****, y) dengan diagram di bawah ini :

|  |
| --- |
| Fungsi ini dalam teori ekonomi mikro menggambarkan fungsi total utility atau fungsi total produksi dimana hanya 1 independent variabel yang berubah atau bervariasi sementara 1 independent variabel lainnya adalah tetap.  |

 **Diagram 4.3.3. : Fungsi dengan 2 independent variables**

 **tapi salah satu variable tetap ()** **: z = g(, y)**

 z

 ●maximum point

 z

 ● inflection point

 0 y

* 1. Bentuk umum fungsi dengan 2 independent variables

Fungsi : z = g(x, y)

Bentuk fungsi : z = ax + by

 z = a0 + a1 x + a2 x2 + b1 y + b2 y2

 z = xy

 Z = AXa Yb (the Cobb-Douglas function)

1. **FUNGSI (EKSPLISIT) DENGAN 2 (DUA) INDEPENDENT VARIABLES (*TANPA ADA YANG TETAP*)**
	1. Contoh penerapannya : teori konsumen (consumer theory)
		* Fungsi utility ditulis :

 U = f(q1, q2)

 Diagram fungsi utility U = f(q1, q2) :

* Kurva pada **Diagram 4.3.1.** di atas menyatakan fungsi total utility dalam 3 dimensi.
* Kurva pada **Diagram 4.3.2.** di atas menyatakan fungsi total utility dalam 2 dimensi dengan 2 independent variables (q1 dan q2), yang disebut **kurva indifference (an indifference curve)** dan untuk semua kurva yang ada disebut **a map of indiffeernce curves** – coba gambar.
* Kurva pada **Diagram 4.3.3.** menyatakan fungsi total utility dalam 2 dimensi tetapi hanya dengan 1 independent variable misal q1.
* Fungsi budget line (fungsi linear) :

**Diagram 4.3.4. : Budget line dan budget set**

I = p1 q1 + p2 q2 q2

 qc = q1 + (p1/p2)q2

 dimana diketahui atau telah I = p1 q1 + p2 q2

 merupakan parameter :

 I adalah pendapatan dan

 qc adalah pendapatan riil

 p1 harga dari q1

 p2 harga dari q2

 0 q1

* Bentuk fungsi utility (U) dimana U diperoleh dari

|  |  |
| --- | --- |
| U = q1 q2U = √q1 q2 = (q1 q2)½U = A q1α q2β | U = q1α/βq2U = q1  + q2U = q12 + q22 |
| U = q1  + q2 + 2q1 q2 U = q12 + q22 + q1 q2U = q1 q2 − 0.01 (q12 + q22)U = q1 q2 + q3 q4  | U = (q1¼ + q2½)½ = √(q1¼ + q2½) U = (q1 + 2 q2 + 3 q3)¼ U = q16 q24 + 1,5 ln q1 + lnq2U = b1 ln (q1 − γ1) + b2 ln (q2 − γ2) |

* 1. Contoh penerapannya : teori produksi (production theory)
* Produksi setiap barang/jasa (Q) menggunakan teknologi (f) dan 4 faktor produksi sumber daya alam (R), tenaga kerja buruh maupun enterprenur (L) dan modal (K), sehingga fungsi produksi :

 Q = f (R, L, K)

 Tapi analisa dalam ilmu ekonomi terfokus pada penggunaan teknologi dan L dan K saja, karena nilai tambah value added) dari R hanya bisa ditingkatkan oleh tiga faktor itu yaitu f, L dan K. Oleh karena itu untuk analisa, maka fungsi produksi :

 Q = f (K, L)

 Diagram fungsi produksi Q = f(K,L) :

* Kurva pada **Diagram 4.3.1.** di atas menyatakan fungsi total produksi dalam 3 dimensi.
* Kurva pada **Diagram 4.3.2.** di atas menyatakan fungsi total produksi dalam 2 dimensi dengan 2 independent variables (q1 dan q2), yang disebut **kurva isoquant (an isoquant curve)** – coba gambar.
* Kurva pada **Diagram 4.3.3.** menyatakan fungsi total produksi dalam 2 dimensi tetapi hanya dengan 1 independent variable misal q1.
* Biaya produksi dengan K dan L dinyatakan oleh isocost dengan bentuk fungsi :

 **Diagram 4.3.5. : Isocost dan costs set**

 C = PK K + PL L K

 dimana diketahui atau telah

 merupakan parameter :

 C adalah costs C = PK K + PL L

 PK harga dari K

 PL harga dari L

 0 L

* 1. Bentuk fungsi produksi yang umum dibahas dalam teori ekonomi

* Pertama, fungsi produksi linear (a linear prouction function)

 Q = AK+ BL → dimana σ = ∞ (tak terhingga) dan σ = elastisitas

 substitusi (elasticity of substitution) antara

 K dan L – K dan L substitusi sempurna

 **the linear production function** dan merupakan constant

returns to scale production function – seperti pada pem- bahasan tentang homothetic function di bawah.

 **Diagram 4.3.6 : The linear and constant returns scale**

 **production function --** σ = ∞

 K Q = F(K,L) = AK+ BL

 Slope = − ∆K/∆L = − B/A

 (tetap-constant sepanjang kurva)

 Q1 Q2

0 L

* Kedua, fungsi produksi dengan proporsi yang tetap (the fixed

Proportions production function)

Q = min (AK, BL) → dimana σ = 0 karena K dan L tidak substitusi

 dan hanya 1 rasio digunakan dalam

 produksi, jadi K/L tetap (fixed), rasio

 K/L yang lain mengakibatkan inefisiensi.

**the fixed proportions production function**

dimana kata **min** berarti bahwa Q diproduksi atas dasar AK atau BL yang terendah, karena produksi hanya dengan 1 rasio K/L.

Sehingga apabila AK < BL misalnya, maka K adalah dasar (binding constraint) dalam proses produksi dan jumlah L mengikuti jumlah K yang lebih rendah. Penggunaan L yang lebih banyak atas dasar rasio K/L terendalah mengakibatkan inefisiensi produksi.

Atau sebaliknya apabila AK > BL.

Pada AK = BL, atau K/L = B/A, maka K dan L dipakai dalam produksi sepenuhnya dan efisiensi produksi tercapai atau minimum biaya produksi diperoleh.

**Diagram 4.3.7. : The fixed proportions production function --** σ = 0

 K Q = F(K,L) = min. (AK, BL); A&B>0

 Slope = − ∆K/∆L = 0

 Q2/A Q2

 Q1

 0 L

 Q2/B

* Ketiga, the returns to scale production function

Q = AKαLβ → dimana σ = 1 dan mempunyai tingkat (**degree**)

 **(returns to scale** (RTS) ditentukan

 oleh (α + β), yaitu apabila K dan L

 dinaikkan t kali yang berarti

 A(tK)α (tL)β = t(α + β) {Q = AKαLβ} = t(α + β) Q,

 maka apabila :

 α +β > 1, maka fungsi mempuyai increasing RTS

α +β **<** 1, maka fungsi bercirikan decreasing RTS

 α +β = maka fungsi bercirikan constant RTS

**Diagram 4.3.8. : The Cobb-Douglas production function**

**(seperti fungsi hyperbola pada Diagram 4.2.5. dan 4.3.2. di atas)**

 K Q = AKαLβ**--** σ = 1

 Slope = − ΔK/ΔL

 Q1 Q2 Q3

 0 L

* Keempat, the constant elasticity of substitution (CES)

 production function

 Q = [Kα  + Lα]β/α → disebut **the constant elasticity of substitution**

 **(CES) production function**, dimana jenis

fungsi ini, dengan α ≤ 1 dan α ≠ 0 serta β > 0 :

 - mencakup tiga jenis produksi di atas

 - the CES production function bercirikan :

 → increasing returns to scale,

 apabila β > 1

 → decreasing returns to scale,

 apabila β < 1

 - memungkinkan elasticity of substitution σ untuk semua angka termasuk 0, 1 dan ∞ seperti pada tiga jenis fungsi produksi di atas, karena mempunyai formula :

**= 1/(1 −α)**

sehingga merupakan :

 → the linear production function, apabila

 α = 1

 → the fixed proportions production

 function, apabila α = − ∞

 → the Cobb-Douglas production function,

 apabila α = 0, yaitu :

 Q = [a Kα  + (1 − a) Lα]β/α

 menjadi

 Q = AKaL(1-a) →

 (the constant returns to scale Cobb-

 Douglas production function)

* Kelima, the generalized Leontief production function

Q = K + L + 2 √K.L → the generalized Leontief production function dan bercirikan constant returns to scale.

* 1. Contoh penerapannya :

The product transformation curve (function) – PTC, atau

The production possibility curve (function) -- PPC

Fungsi atau kurva PPC mempunyai bentuk fungsi dan diagramnya :

M = x2 + y2 → dimana M adalah bilangan

225 = 2q12 + q22

 **Diagram 4.3.9. : PPC**

 y

 opportunity cost of x = ∆y/∆x =

 = slope kurva PPC =

 = (6-4)y/(12-8)x =2y/4x =1/2 y

 6 A

 4 B

 0 8 12 x

* 1. Bentuk lain dari fungsi produksi

 dengan 2 independent variables lainnya

 Q = AK2L2 − BK3L3

 Q = KL − 0,2 K2 − 0,8 L2

 Q = 100 (K + L) + 20 KL − 12,5 (K2 + L2)

 Q = A (K + 1)α (L + 1)β

 Q = A(Kα + Lβ)

* 1. **FUNGSI (EKSPLISIT) DENGAN LEBIH DARI**

 **2 (> DUA) ATAU MULTI INDEPENDENT VARIABLES**

 **(*TANPA ADA YANG TETAP)***

1. Fungsi dengan 3 independent variables

 U = AXα Yβ Zγ

 Q = q1 q2 + q1 q3 + q2 q3

1. Fungsi dengan 4 independent variables

 2 X4 + 5 x3 − 11 x2 − 20 x + 12 = 0

1. Jenis fungsi lainnya :

Inverse functions dan monotonic functions,

Homogeneous functions, Homothetic functions

* Inverse functions
	+ Inverse function adalah kebalikan (inverse) dari setiap one-to-one function, misal untuk fungsi y = f(x) mempunyai inverse function x = f -1(y).

Contoh :

* Fungsi demand : Q = f(P) = 100 − 5 P

 Inverse demand function : P = f(Q) = 20 − 1/5 Q

* Fungsi supply : Q = f(P) = 120 − 3 P

 Inverse supply function : P = f(Q) = 40 − 1/3 Q

* Exponential function Y = eX dan log atau logarithmic function X = ln Y = loge Y seperti pada Diagram 4.2.7. di atas adalah an original function dan its inverse function atau sebaliknya.

*If the function y = f(x) represents a one-to-one mapping, i.e. the function is such that each value of y is associated with a unique value of x, the function f will have an inverse function x = f−1(y) --- x is an inverse function of y. That is, also a given value of y will yield a unique value of x.*

*Examples : Husband vs. wife in a monogamous family or society, each husband has a unique wife, vice versa. So, there is a unique inverse relation or function.*

*Yet, there is no an inverse relation between father and sons, because a father may have more than one son, but each son has a unique father.*

Syarat terdapat an inverse function apabila fungsi awal (the original function) adalah a monotonic function.

Jadi baik the original function dan the inverse function adalah monotonic functions, sehingga keduanya merupakan inverse function satu sama lainnya.

* Fungsi monotonic (monotonic functions)
	+ Fungsi monotonic sepenuhnya (a strictly monotonic or monotone function f)*,* apabila :

 x1 > x2 ⇒ f(x1) > f(x2) --- f is strictly increasing function

 x1 < x2 ⇒ f(x1) < f(x2) --- f is strictly decreasing function

Dengan menggunakan derivatives atau slopes, maka a strictly monotonic function selalu mempunyai derivative dengan tanda yang sama, tanda + untuk a strictly increasing function dengan slope naik (upward slope), tanda − untuk a strictly decreasing function dengan downward slope.

Contoh :

3 fungsi pada contoh inverse functions di atas adalah strictly monotonic functions.

* + Fungsi monotonic tidak sepenuhnya (a monotonic or monotone function f)*,* apabila :

 x1 > x2 ⇒ f(x1) ≥ f(x2) --- f is increasing function

 x1 < x2 ⇒ f(x1) ≤ f(x2) --- f is strictly decreasing function

 Contoh :

A U-shaped curve (not strictly monotonic) mempunyai tiga bagian (segments) : kurva menurun dengan downward slope, kurva naik dengan upward slope, kurva datar dengan zero slope.

Seperti dicerminkan oleh quadratic functions pada Diagram 4.2.3. di atas, misal dengan bentu valley parabola atau U-shaped curve, dimana dengan w terus naik, maka :

* kurva turun dengan slope menurun
* kurva datar dengan slope nol
* kurva naik dengan slope meningkat
* Homogeneous functions

Fungsi homogen (homogeneous functions) mempunyai ciri dimana : apabila semua independent variables dilipatkan t kali dan hasilnya menyebabkan nilai dependent variable atau fungsi terlipat sebanyak t kali pangkat k (tk), maka fungsi merupakan homogeneous of degree k, berarti :

 apabila independent variables dari fungsi

 f(x1, x2, x3, …, xn) dilipatkan t kali, dimana t > 0, maka :

 f(tx1, tx2, tx3, …, txn) = tk f(x1, x2, x3, …, xn)

 Contoh :

* Homogeneous of degree nol (0) yaitu k = 0
	+ independent variables dari fungsi :  = f (x,y,w dilipatkan t kali, menyebabkan nilai fungsi dimaksud terlipat sebanya t0, maka fungsi tersebut mempunyai ciri homogeneous of degree nol (0) :

 f (jx, jy, jw) =  = t0  = t0 f (x, y, w)

 = 

* + Dengan the Cobb-Douglas function

q (jK, jL) = A(jK)α (jL)β = jα+β AKαLβ

maka fungsi AKαLβ merupakan homogeneous of degree 0, apabila pangkat dari pelipatan j adalah 1, yaitu (α+β) = 0, sehingga :

q (jK, jL) = A(jK)α (jL)β = j0 AKαLβ = AKαLβ

* Homogeneous of degree 1 (k =1) juga disebut

linearly homogeneous function

* + g(tx, ty, tw) = t1 g(x,y,w) :

 (tx)2 2(tw)2 t2 ( x2 2w2 ) ( x2 2w2 )

 + = ( + ) = t ( + )

 (ty) (tx) t ( y x ) ( y x )

* + Dengan the Cobb-Douglas function

q (jK, jL) = A(jK)α (jL)β = jα+β AKαLβ

maka fungsi AKαLβ merupakan homogeneous of degree 1, apabila pangkat dari pelipatan j adalah 1, yaitu (α+β) = 1, sehingga :

q (jK, jL) = A(jK)α (jL)β = j1 AKαLβ = j AKαLβ

* Homogenous of degree2 (k = 2)
	+ 2(tx)2 + 3(tyw)2 − (tw)2 = t2 (2x2 + 3yw − w2)
	+ Dengan the Cobb-Douglas function

q (jK, jL) = A(jK)α (jL)β = jα+β AKαLβ

maka fungsi AKαLβ merupakan homogeneous of degree 2, apabila pangkat dari pelipatan j adalah 1, yaitu (α+β) = 2, sehingga :

q (jK, jL) = A(jK)α (jL)β = j2 AKαLβ

* Cek untuk fungsi :
	+ Q = f(P) = a − b P
	+ Q = f (K, L) dengan homogeneous of degree 1/L → lihat C&W (Book 4) Ch. 12 hal. 383 – 389
* Homothetic functions

Fungsi homothetic (homothetic functions) adalah fungsi yang merupakan transformasi monotonic (a monotonic transformation) dari homogeneous (homogeneous functions) – *a homothetic function is one that is formed by taking a monotonic transformation of a homogeneous function*.

Penjelasan :

* Monotonic transformation, seperti pengertian pada monotonic functions di atas, yaitu :

fungsi f (x) adalah a positive monotonic transformation of x apabila x1 > x1 maka f(x1) > f(x1), sebaliknya, a negative monotonic transformation bila x1 < x1 maka f(x1) < f(x1).

* + - * Fungsi homothetic H = h (Q (a, b)) atau H = H (a, b) adalah fungsi dari fungsi (a composite function) berasala dari fungsi homogeneous Q = Q (a, b) dengan degree t, dimana turunan pertama (the first derivative) h**′** (Q) = dH/dQ ≠ 0.

Mempunyai unsur terpenting yaitu bahwa slope dari fungsi homothetic sama.

Contoh :

* + - * + Karena :

 Q = Q (a, b) = Aaαbβ adalah homogeneous

 dan

 H = Q2 = (Aaαbβ)2 = A2a2αb2β = h (a, b) dan h′(Q) = 2Q > 0

 maka fungsi H adalah homothetic

Slope dari fungsi H berbentuk convex terhadap titik asal 0 (kurva isoquants) seperti pada diagram 17 di atas, maka slope dari kurva hanya tergantung pada rasio dari variabel a dan b dan bukan pada nilai absolut variabel dimaksud, yaitu :

 Ha A2 2αa2α-1 2βb2β-1 αb

Slope fungsi H = − −−− = − −−−−−−−−−−−−− = − −−−

 Hb A2 a2α 2βb2β-1 βa

 Buktikan H selain homothetic juga homogeneous.

* + - * + Juga dengan H = eQ = exp(Aaαbβ) = H (a, b) menghasilkan slope yang sama yaitu :

 Ha Aαaα-1 bβ exp(Aaαbβ)αb

 Slope fungsi H = − −−− = − −−−−−−−−−−−−−−− = − −−

 Hb Aaα βbβ exp(Aaαbβ) βa

 Buktikan walaupun H homothetic tapi tidak homogeneous.

* + - * Pada umumnya fungsi homothetic H = h (Q (a, b)) atau H = H (a, b) bukan homogeneous pada varaibel a dan b.

Setiap homogeneous function merupakan homothetic function, tetapi tidak sebaliknya karena homothetic function termasuk yang bukan homogeneous function.

Contoh :

z = f (x, y) = x.y → merupakan homogeneous of degree 2.

Monotonic transformation dari fungsi z menjadi a composite function :

 H = h (z (x, y)) = h (z) = H (x, y) = x.y + 1

yang jelas bukan homogeneous function.

**Bahan 4.4.**

**PERSAMAAN SIMULTAN**

**(SIMULTANEOUS EQUATIONS AND**

**REDUCED FORM EQUATIONS)**

Persamaan simultan (simultaneous equations) terdiri dari sejumlah fungsi atau bentuk fungsi. Penyelesaiaannya juga disebut penyelesaian masalah fungsi (functional problem solving).

Penyelesaian persamaan simultan akan menghasilkan nilai atau angka untuk setiap variabel dari fungsi, yaitu variabel tergantung (dependent variable atau fungsi) dan sejumlah variabel bebas (independent variables).

* + 1. **CONTOH 1 :**

 **DENGAN FUNGSI LINEAR (LINEAR FUNCTIONS)**

1. Seperti pada Bahan 4.2. di atas, fungsi permintaan pasar (market demand (D) function) atau kurva demand (demand curve or D curve), dinyatakan oleh :

 Fungsi demand : P = f (Q) = a/b − 1/b Q (bentuk fungsi)

 = 5/2 − 1/2 Q

fungsi demand (the Marshallian demand function) itu diubah atau dibalikkan (inverted) sehingga Q sebagai variable tergantung (dependent variable) dan P sebagai varabel bebas (independent variable)

 *The inverse demand function* : QD = f(P) = a − b P (bentuk fungsi)

 = 5 − 2 P

1. Fungsi penawaran pasar (market supply (S) function) atau kurva supply (supply curve or S curve), dinyatakan oleh :

 Fungsi supply : P = f (Q) = c/d + 1/d Q (bentuk fungsi)

 = 4/3 + 1/3 Q

 *The inverse supply function* : QS = f(P) = − c + d P (bentuk fungsi)

 = − 4 + 3 P

1. Pasar (market) -- demand dan supply : diagram dan penyelesaian

**Diagram 4.4.1.**

**PASAR (MARKET)**

**(Bandingkan dengan Diagram 4.2.2.)**

 **Q (Kuantitas)**

5

 **S : Q = − 4 + 3 P**

 **D : Q = 5 − 2 P**

 ∆Q

 ∆P

 P\*=9/5 E

 ∆Q

 ∆P

 0 Q\*=7/5 **P (Harga)**

 (D = S)

 Ekulibrium : D = S

 5 − 2 P = − 4 + 3 P

 − c = − 4 Maka : P\* = 9/5; Q\* = 7/5

Penyelesaian persamaan simultan D dan S dapat dilakukan karena terdapat dua persamaan dan 2 variabel yang tidak diketahui angka atau bilangan (real numbers).

Pada titik perpotongan kedua fungsi atau kurva demand dan supply, yaitu pada keseimbangan (equilibrium) demand = supply, sehingga :

 Maka : 5 − 2 P = − 4 + 3 P

 Jadi diperoleh 5 P = 9 sehingga P\* = 9/5 = 1 4/5

 dan Q\* = 7/5 = QD = QS

 Buktikan :

* Pada harga di atas 9/5 atau P > 9/5, terjadi kelebihan supply (excess supply) atau QS > QD. Sebaliknya, pada harga di bawah 9/5 atau P < 9/5, terjadi kelebihan demand (excess demand) atau QS > QS.
* Equlibrium dengan tiga fungsi linear atau tiga garis.
	+ 1. **CONTOH 2 : DENGAN FUNGSI LINEAR DAN**

 **QUADRATIC (QUADRATIC FUNCTION)**

Dua fungsi dan dua variabel yang perlu dicari besarannya :

 Demand : QD = 4 − P2

 Supply : QS = 4 P − 1

Pada equilibrium : QD = QS , maka :

 4 − P2 = 4 P − 1 → menjadi : 0 = P2 + P − 5, maka :

 P1, P2 =  =  = 1, −5

Karena harga dalam ekonomi adalah bilangan positif, maka solusi yang diterima adalah P = 1 (lihat Bahan 4.5. di bawah).

 Jadi P = 1 dan Q = 3 = QD = QS

Harap gambar fungsi QD dan QS dan tunjukkan angka keseimbangannya di atas.

* + 1. **CONTOH 3 : DENGAN LINEAR FUNCTIONS DAN**

 **DUA INDEPENDENT VARIABLES**

1. Dua pasar :

 Pasar 1 (Market 1) :

 QD1 = a0 + a1 P1 + a2 P2

 QS1 = b0 + b1 P1 + b2 P2

 a0, a1, a2, b0, b1, b2 adalah bilangan > 0

 Pasar 2 (Market 2) :

 QD2 = α0 + α1 P1 + α2 P2

 QS2 = β0 + β1 P1 + β2 P2

 α0, α1, α2, β0, β1, β2 adalah bilangan > 0

1. Equilibrium

 Pasar 1 (Market 1) :

 QD1 = QS1→ a0 + a1 P1 + a2 P2 = b0 + b1 P1 + b2 P2

 menjadi :

 (a0 − b0) + (a1 − b1) P1 + (a2 − b2) P2 = 0

 menjadi :

 c1 P1 + c2 P2 = − c0

 dimana :

 (a0 − b0) = c0 ; (a1 − b1) = c1 ; (a2 − b2) = c2

 Pasar 2 (Market 2) :

 QD2 = QS2 → α0 + α1 P1 + α2 P2 = β0 + β1 P1 + β2 P2

 menjadi :

 (α0 − β0) + (α1 − β1) P1 + (α2 − β2) P2 = 0

 menjadi :

 1 P1 + 2 P2 = − 0

 dimana :

 (α0 − β0) = 1 ; (α2 − β2) = 2 ; (α3 − β3) = 3

Dengan demikian terdapat dua persamaan untuk penyelesaian dua variabel (P1 dan P2) :

 c1 P1 + c2 P2 = − c0

 1 P1 + 2 P2 = − 0

 Maka :

|  |  |
| --- | --- |
|  c2 0 − c0 2 P1 = −−−−−−−−−−  c1 2 − c2 1   |  c0 1 − c1 0 P2 = −−−−−−−−−−  c1 2 − c2 1  |
| Syarat : c1 2 ≠ c2 1, sehingga penyebut (denominator) tidak sama dengan 0 (nol) |

* + 1. **CONTOH 4 : FUNGSI REDUCED FORM**

 **(A REDUCED FORM EQUATION)**

Persamaan identity (identity equation) : Y = C + I + G

Fungsi-fungsi :

YD = Y − T

T = T(Y) = T0 + t Y ; T0 = bilangan, 0 < t > 1

C = C(YD) = a + c YD = a + c (Y − T) = a + cY − c (T0 + t Y)

 = a + (c − t) Y − c T0 ; a > 1, 0 < c > 1

 I = I(i) = I0 − b i ; b > 1

 G = G0 + g Y ; g > 1

 Y = C + I + G

Dengan substitusi, maka :

 Y = {a + (c − t) Y − c T0} + {I0 − b i} + {G0 + g Y} → sehingga :

 {1 − (c − t) − g} Y = {a − c T0 + I0 − b i + G0} → menjadi :

 1

 Y = −−−−−−−−−−−−−−− {a − c T0 + I0 − b i + G0}

 {1 − c + t − g}

 dimana :

 1

 −−−−−−−−−−−−−−− = multiplier (pelipat ganda) > 1 karena

 {1 − c + t − g} {1 − c + t − g} < 1

 {a − c T0 + I0 − b i + G0} = A = Autonomous (exogeneous)

Dengan demikian identity di atas diubah menjadi suatu persamaan fungsi, dimana :

* + Y sebagai endogeneous variable (dependent variable) di sisi kiri,
	+ {a − c T0 + I0 − b i + G0} = exogeneous (independent variable)

 di sisi kanan

Persamaan fungsi ini disebut a reduced form function, karena :

* + The identity dimaksud diubah menjadi fungsi tetapi di sisi kanan masih tercampur dengan dependent variable atau endegenous variable Y.
	+ Selanjutnya diselesaikan sehingga diperoleh fungsi jelas endegenous variable di sisi kiri dan exegeneous di sisi kanan.

**Bahan 4.5.**

**AKAR PERSAMAAN**

**(EQUATION ROOTS)**

1. **ROOTS UNTUK PERSAMAAN (FUNGSI) KUADRATIK**

**(QUADRATIC FUNCTION OR EQUATION)**

1. Fungsi kuadratik :

 0 = ax2 + bx + c → dengan contoh :

 0 = P2 + 4 P − 5 → dimana : a = 1, b = 4, c = − 5

yaitu dengan menjadikan sisi kiri sama dengan 0 (nol)

 Kemudian, gunakan rumus :

 x1, x2 = 

 Catatan :

* Sepanjang (b2 – 4ac)1/2 > 0, maka akan diperoleh dua bilangan riil (real numbers) x1 dan x2 yang berbeda (different roots.
* Tapi kalau (b2 – 4ac)1/2 = 0, maka akan diperoleh x1 = x2 = − b/2a (repeated roots).
* Namun kalau (b2 – 4ac)1/2 < 0, maka tidak akan diperoleh *real valued roots* x1 dan x2, karena merupakan hasil kuadrat dari bilangan negatif yang tidak mungkin dalam sistem bilangan riil (the real number system).
	1. Contoh : dengan fungsi kuadratik : 0 = P2 + 4 P − 5, maka :

 P1, P2 =  =  = 1, −5

Karena harga dalam ekonomi adalah bilangan positif, maka solusi yang diterima adalah P = 1.

* 1. Roots dari fungsi q2 − 15 q + 10 = 0 adalah q1 = 5 dan q2 = 10. Buktikan.
1. **ROOTS UNTUK PERSAMAAN (FUNGSI) KUBIK**

**(CUBIC FUNCTION OR EQUATION)**

Fungsi kubik (cubic function)

x3 − x2 − 4 x + 4 = 0 → mempunyai factoring

 (x − 1)(x + 2)(x − 2) = 0 → sehingga

x1 = 1, x2 = − 2, x3 = 2

1. **PEDOMAN CARI ROOTS**
	1. Prinsip umum

 Untuk fungsi polynomial n degree :

 y = f(x) = a0 + a1 x + a2 x2 + a3 x3 + … + aN xn

 maka terdapat n roots yaitu x1, x2, x3, ..., xn

1. Theorem I

Apabila semua koefisien dan konstan pada fungsi polynomial adalah bilangan bulat (integers) dan koefisien dari xn adalah 1 (satu), maka apabila integer roots dapat diselesaikan atau diperoleh, setiap roots adalah pembagi (a divisor) dari parameter a0.

 Contoh :

 Roots pada contoh di atas x1 = 1, x2 = − 2, x3 = 2, dimana a0 = 4 merupakan produk atau hasil kali dari tiga roots tersebut, sehingga setiap root x1 = 1, x2 = − 2, x3 = 2 adalah sebagai pembagi atau divisor a0.

1. Theorem II

Tetapi apabila pada fungsi polynomial terdapat koefisien dalam desimal atau rasio dari integers r dan s, namun tanpa pembagi yang sama (a common divisor) kecuali 1 (satu), maka r adalah divisor dari a0 dan s adalah divisor dari an.

Contoh dengan fungsi kuartik (a quartic function) – the fourth degree polynomial function :

 X4 + 5/2 x3 − 11/2 x2 − 10 x + 6 = 0

atau menjadi

 2 X4 + 5 x3 − 11 x2 − 20 x + 12 = 0

maka dengan :

a0 = 12, bilangan yang mungkin sebagai divisor r adalah pada set bilangan {1, −1, 1/2, −1/2, 2, −2, 3, −3, 3/2, −3/2, 4, −4, 6, −6, 12, −12};

an = 2, bilangan yang mungkin sebagai divisor s adalah pada set bilangan {1, −1, 2, −2}.

Maka set untuk rasio r/s adalah :

{1, −1, 1/2, −1/2, 2, −2, 3, −3, 3/2, −3/2, 4, −4, 6, −6, 12, −12}

Dengan demikian, maka terdapat 4 roots yang cocok (satisfying) persamaan fungsi dimaksud, yaitu :

 1/2, 2, −2, − 3 → maka persamaan fungsi itu mempunyai factoring :

 (x − 1/2)(x − 2)(x + 2)(x + 3) = 0; (x − 1/2) = (2x − 1)

1. Theorem III

Selanjutnya, apabila penjumlahan dari semua angka koefisien fungsi polynomial menjadi 0 (nol), yaitu a0 + a1  + a2 + a3 + … + aN = 0, maka setiap root dari persamaan fungsi adalah 1 (satu), yaitu x = x2 = x3 = … = xn = 1.