**S1- MATEMATIKA I**

**BAHAN 7**

* **TURUNAN FUNGSI (DERIVATIVES OR DIFFERENTIATIONS)**
* **LANJUTAN TURUNAN FUNGSI**

**(DERIVATIVE OR DIFFERENTIATION) :**

**PARTIAL DERIVATIVE, TOTAL DIFFERENTIAL,**

**TOTAL DERIVATIVE**

**Bahan 7.1.**

**TURUNAN FUNGSI**

**(FUNCTION DERIVATIVES OR DIFFERENTIATIONS)**

1. **The Difference Quotient**

Fungsi (a primitive function) : y = f (x)

Kemudian, nilai fungsi atau dependent variable y berubah dari y0 = f (x0) ke y1 = f (x1), karena nilai independent variable x berubah dari x0 ke x1.

Maka timbul : ∆y/∆x

yaitu perubahan pada varabel y karena perubahan per unit atau 1 unit pada variabel x (the change in y per unit of change in x), yang dinyatakan dengan istilah **the difference quotient** :



**Diagram : The Difference Quotient atau the Function Slope**

**y** y = f (x)

y

∆y

f (x + ∆x) − f (x) = ∆y

∆x ∆x

f (x + ∆x)

f (x)

0 ∆x x 0 ∆x x

x0 x1 = x0 + ∆x x0 x1= x0 +∆x

Contoh :

y = f (x) = 3 x2 − 4 → a primitive function

 =

6 x0 ∆x + 3 (∆x)2

= −−−−−−−−−−−−− = 6 x0 + 3 ∆x = 6.3 + 3.4 =30

∆x apabila x0 = 3 dan ∆x = 4

Artinya, secara rata-rata, perubahan x dari 3 ke 7 menyebabkan perubahan pada fungsi atau y sebesar 30 unit untuk setiap unit perubahan x atau per unit perubahan x.

* 1. **The Derivative**

Derivatif (the derivative) menyatakan tingkat perubahan nilai fungsi atau dependent variable y untuk perubahan independent variable x sekecil-kecilnya mendekati 0 (nol) atau ∆x → 0, yaitu :



Dibaca :

Apabila, perubahan x mendekati 0 atau ∆x → 0, limit dari the difference quotient terjadi (exist) atau mendekat nilai fungsi pada x0, maka limit itu disebut **derivative (the derviative)**.

*If, as ∆x approaches zero or ∆x → 0, the limit of the difference quotient ∆y/∆x indeed exists, that limit is called the derivative of the function y = f (x).*

Contoh :

 6 x0 + 3 ∆x = 6 x0 = 6. 3 = 18

Penjelasan :

* + - The derivative terjadi (exist) apabila y = f (x) merupakan fungsi yang kontinyu (continuous) pada nilai variabel x sebesar x0. Jadi *differentiable* berarti kontinyu, sebaliknya tidak berlaku.

Atau suatu fungsi yang differentiable pada titik x = x0, apabila fungsi mempunyai derivatif dan berarti kontinyu pada titik itu.

*A function which is differentiable at every point in its domain, it must be continuous in its domain. That is, differentiability implies continuity. Yet, the converse is not true.*

Lihat **C**&W (Book 1) Ch. 6 hal. 143-146).

* + - Derivatif (derivative) adalah turunan atau perubahan dari dependent variable (fungsi) karena perubahan (sekecil apapun) dari setiap independent variable.

Seperti terlihat pada Diagram di atas, derivatif adalah **the slope** dari fungsi y = f (x) pada setiap titik x.

Istilah derivative mempunyai sama arti dengan istilah **differentiation** atau **derivation**.

Turunan atau perubahan dependent variable dimaksud mempunyai order : kesatu (the first derivative), kedua (the second derivative), dan seterusnya.

*A derivative of the function y = f(x) is the limit of Δy/Δx for every small changes in x, and it is denoted as dy/dx or f′(x), etc.*

*The term of derivative is the same as derivation or differentiation.*

*There are the first derivative, the second derivative, and further order*

*derivatives on.*

Lihat **C**&W (Book 4) Ch. 6 hal. 143-146).

* + - Notasi derivatif :



* + - The derivative juga merupakan suatu fungsi atau fungsi turunan (a derived function) dari fungsi asal (a primitive function) seperti di atas yaitu y = f (x).
      * 1. **Kurva fungsi dan marginal atau derivative**

A B

y, dy/dx y, dy/dx

50

y = 1 + ½ x y = 1/6 x3 − 10 x + 50

(total)

1  (marginal)

20

½  x2 − 10

(marginal)

x | | | | x

0 0 2 4 6 8

− 10

y, dy/dx C

5

4  

3

2 (marginal)

1—

0 ‘ ‘ ‘ ‘ ‘ ‘ x

1 2 3 4 5 6 7

−1

* + - * 1. **Aturan derivatif dari fungsi dengan 1 (satu) independent variable**

**(derivative rules for functions of one independent variable)**

1. Constant function rule

y = f(x) = k = k.x0 → 0. k. x0-1 = 0

1. Power function rule

y = f(x) = c xn →  c. n. xn-1

1. Sum difference rule

y = f(x) + g(x) + h(x) = ax2 + bx + c

 = 2ax +b

1. Product rule

y = f(x)g(x) = (2x – 3)(x + 1)

 = 2(x + 1) + (2x − 3)1

1. Quotient rule

y = f(x) / g(x) = (2x – 3) / (x + 1)



2 . (x + 1) − (2x – 3) . 1 5

= =

(x + 1)2 (x + 1)2

1. Chain rule : derivatives for functions of different variables

z = f(y) while y = g(x) --- z = f(g(x)) = y17 = (x2 + 3x – 2)17

 f′(y).g′(x) = 17y16.g′(x) = 17(x2+3x–2)16.(2x+ 3)

1. **Inverse-function rule** y y

y = f (x) --- one-to-one function

d c

Maka  c d

0 a b x 0 a b x

y = f(x) differentiable pada interval a ≤ x ≤ b dan derivatifnya dy/dx tidak berubah tanda. Seperti pada diagram, kedua fungsi mempunyai nilai sepanjang nilai dari domain fungsi dalam hal ini interval itu. Jadi untu setiap nilai y = f(x) pada setiap fungsi terdapat satu hanya satu nilai x dimana x merupakan fungsi dari y yaitu x = g(y). Maka f(x) dan g(y) disebut inverse functions.

1. **Derivatives dari fungsi pangkat dan fungsi logaritma**

**(derivatives of exponential and logarithmic functions)**

1. Exponential function
   * + - * y = ef(t)  

Misal : y = A ert 

* + - * + y = f(t) = bf(t)  

Misal : y = f(t) = A brt 

1. Logarithmic (log) functions
   * + - * y = ln f(t) 
         * y = logb f(t) 

Contoh :

* y = k ln at 

* y = ln tc 

* y = bt = et ln b 

* + y = logb t 

1. **Elastisitas**
   * Formula elastisitas y terhadap x = εyx : 

* + Elastisitas dengan fingsi logarithma

  εyx = Elastisitas y terhadap x

Contoh :

* y = f(x) = a − b x (tanpa log)

εyx = b. (x/y)

y = x aekx-c atau ln y = a ln x + ln ekx-c = a ln x + kx – c

maka derivative terhadap x menjadi :

  εyx = ?

A (t) = V e-rt = K e√t e -rt = K e -rt + √t

Cari : 1. Derivative A terhadap t :

2. The rate of growth of A = rt = 

1. **Soal latihan** 
   * + 1. y = x3 + 2x ─ 3
       2. 
       3. 
       4. y = (2x + 1)2 + 3
       5. s = t3 ─ 3t2 dimana s adalah *velocity* diukur dalam ms-1 atau dalam meter dan detik
       6. 

Buktikan :

* + - * + f(x) continuous pada x = 0
        + f(x) punya derivatif pada x = 0
      1. 

Buktikan :

* + - * + Continuity
        + Differentiability
      1. Soal-soal lainnya

|  |  |
| --- | --- |
| * 1. TFC = f (Q) = 7   2. y = f (x) = a + b x   3. y = 3 x−2 + 4 √x − 7 x2/3   4. y = g (x) = (2 x + 3)(3 x2)   5. y = f (x) / g (x) = (2 x − 3)/(x +1)   6. y = (ax2 + b) / cx   7. z = 3 (2 x + 5)2   8. Y = F (X) = (X − 1)/(X2 + 2 X + 4)   9. Y = A / X   10. Q = Q (P) = a − b P   11. Q = − 4 + 3 P   12. P = P (Q) = − c/d + (1/d) P   13. Q = −5 + 4 P + P2 | * 1. z = g (w) = b0 + b1 w + b2 w2   2. C = C (Q) = k0 + k1 Q + k2 Q2 + k3 Q3   3. C = 0,04 Q3 − 0,9 Q2 + 10 Q + 5   4. TVC = aQ + b Q2 + c Q3   5. AVC = TVC/Q = a + b Q + c Q2   (buktikan dengan sum dan quotient rules)   * 1. MC = k (Q) = a + 2b Q + 3c Q2   2. TR = R (Q) = 7 Q − 0,01 Q2   3. AR = TR/Q = 7 − 0,02 Q   (buktikan dengan sum dan quotient rules)   * 1. y = f (x) = x3 − x2 − 4 x + 4   2. h = h (g) = g4 + 5/2 g3 − 11/2 g2 − 10 g + 6   3. Z =Z (G) = 2 G4 + 5 G3 −11 G2 − 20 g +12 |

**Fungsi-fungsi exponential dan logarithma**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. y = 43x 2. y = 6 e−2t dan y = A ert 3. y = b12−x 4. y = exp (ax2 + bx + c) 5. A (t) = V e-rt = K e√t e-rt = K e-rt + √t | 1. y = x2 / {(x + 3) (2 x + 1)}---dengan ln 2. y = x3 ln x2 3. U = q16 q24 + 1,5 ln q1 + lnq2 4. U = b1 ln (q1−γ1) + b2 ln (q2 − γ2) 5. C = 0.04q3 − 0,9q2 + (10 − lnk)q + 8 k2 |

**Bahan 7.2.**

**TURUNAN (DERIVATIVES) DARI**

**FUNGSI DENGAN**

**LEBIH DARI 1 (SATU) INDEPENDENT VARIABLE :**

**PARTIAL DERIVATIVES,**

**TOTAL DIFFERENTIALS,**

**TOTAL DERIVATIVES**

1. **TURUNAN PARSIAL (PARTIAL DERIVATIVES) DARI FUNGSI**

**DENGAN LEBIH DARI 1 (SATU) INDEPENDENT VARIABLE**

Partial derivatives adalah derivatives dependent variable (fungsi) karena perubahan hanya satu independent variable sementara satu independent variable lainnya dianggap tetap.

Fungsi : y = f(x1, x2, x3, …, xn) --- y = f(nj) dimana i = 1, 2, 3, …, n

∂y

Derivatives : fj =

∂xj

Contoh :

y = 3(x1)2 + x1x2 + 4(x2)2

f1 = 6x1 + x2 ; f2 = x1 + 8x2

1. **TOTAL DIFFERENTIALS : DERIVATIVES DARI FUNGSI**

**DENGAN INDEPENDENT VARIABLE LEBIH DARI 1 (SATU)**

Total differential dapat didefinisikan sebagai derivative (perubahan) dependent variable karena perubahan setiap independent variable secara besamaan.

Jadi berbeda dengan derivative dan partial derivative sebelumnya, yang merupakan perubahan dependent variable (fungsi) karena perubahan satu independent variable sementara independent variable lainnya dianggap tetap.

Penulisan total differential :

y = f(x1, x2, x3, …, xn) --- y = f(nj) dimana j = 1, 2, 3, …, n

Total differential atau total perubahan y karena setiap independent variable berubah secara bersamaan, ditulis dy :

dy = f1. dx1 + f2. dx2 + … + fn. dxn

Contoh :

y = 3(x1)2 + x1x2 + 4(x2)2

dy = f1.dx1 + f 2.dx2 = (6x1 + x2) . dx1 + (x1 + 8x2) . dx2

1. **TOTAL DERIVATIVES : DERIVATIVES DARI FUNGSI**

**DENGAN INDEPENDENT VARIABLE LEBIH DARI 1 (SATU)**

Total derivative adalah total differential dengan fokus pada perubahan hanya satu independent variable.

Dengan kata lain, total derivative adalah total differential dibagi perubahan satu independent variable.

Penulisan total derivative dengan total differential di atas, misal dengan perubahan independent variable x2 (dx2) :

dy dx1 dxn

= f1 + f2 + … fn

dx2 dx2 dx2

Contoh :

y = 3(x1)2 + x1x2 + 4(x2)2

dy/dx2 = f1.(dx1/dx2) + f 2 = (6x1 + x2) . dx1/dx2 + (x1 + 8x2)

**Bahan 7.3.**

**TURUNAN (DERIVATIVES) DARI**

**FUNGSI IMPLISIT (IMPLICIT FUNTIONS) DENGAN**

**LEBIH DARI 1 (SATU) INDEPENDENT VARIABLE :**

Fungsi F(y, x1, x2, x3, …, xn) = 0 adalah

an implicit function dari an explicit function

y = f(x1, x2, x3, …, xn) --- y = f(nj) dimana j = 1, 2, 3, …, n

Derivative the implicit function :

dF = 0

dF = Fy .dy + F1 .dx1 + F2 .dx2 + … + Fn . dxn = 0

dimana dy = f1. dx1 + f2. dx2 + … + fn. dxn, maka :

df = Fy .{f1.dx1 + f2.dx2 + … + fn.dxn) + F1.dx1+F2.dx2+…+Fn.dxn=0

= (Fy.f1 + F1)dx1 + (Fy.f2 + F2)dx2 + … + (Fy.fn + Fn)dxn  = 0

berarti setiap (Fy.fj + Fj)dxj = 0 dimana j = 1, 2, 3, …, n

∂y Fj

maka fj = = -

∂xj Fy

Untuk the implicit function dua variabel F(y, x) = 0 :

dy Fx

maka = -

dx Fy

Contoh : F(y,x) = x2 + y2 + 9 = 0

dy Fx  2x x

maka = - =- =-

dx Fy 2y y

Exercise dengan fungsi F(Q,K,L) dari the explicit function production function Q = f(K,L), cari MPK dan MPL