PROGRAMA DINAMIS

Pendahuluan

Dalam Kehidupan nyata sering dijumpai masalah pengambilan keputusan yang meliputi beberapa periode waktu. Program Dinamis adalah teknik untuk pengambilan keputusan yang digunakan untuk pengambilan keputusan yang terdiri dari beberapa tahapan. Permasalalahan yang akan diselesaikan diuraikan menjadi sub persoalan yang saling berhubungan. Tujuan Program Dinamis adalah mengoptimalkan urutan keputusan.

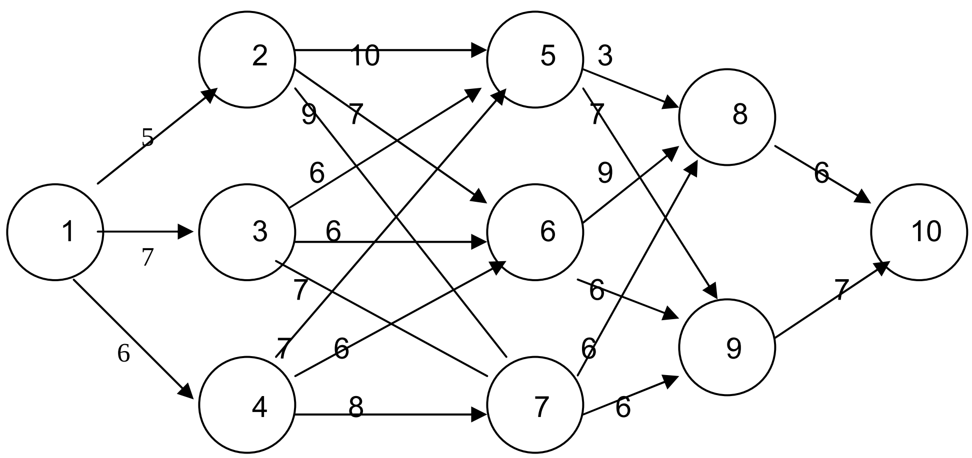
Program Dinamis diterapkan pada persoalan bisnis dan industri, a.l. masalah penjadualan produksi, pengendalian persediaan, analisa jaringan, dan lain sebagainya. Contohnya seorang produsen menjadualkan tingkat produksi tahunannya ke dalam mingguan, bulanan atau triwulanan agar dapat memenuhi permintaan tahunan. Jika dia memproduksi lebih dari permintaan, dia harus mengeluarkan biaya persediaan, karena menyimpan kelebihan produksi. Sebaliknya jika produksi dibawah jumlah permintaan, dia akan mengalami kerugian dalam kesempatan membuat untung dan juga kehilangan kepercayaan pembeli. Dia mungkin juga harus membayar penalti karena tidak dapat memenuhi kontrak. Pimpinan produksi harus membuat urutan keputusan untuk setiap periode, yang akan berdampak pada keputusan berikutnya. Masalah optimasi pada kasus ini adalah meminimalkan keseluruhan biaya produksi dan persediaan (dua penalti, jika ada) yang memenuhi kebutuhan permintaan.

Teknik pemecahan pada programa dinamis ini beragam, tergantung pada sifat dan struktur dari masalah yang diselesaikan. Hal ini lain dari programa linier, dimana setiap masalah dipecahkan dalam pola yang spesifik.

Model Dasar Dari Model Programa Dinamis

1. Masalah Kereta Kuda/lintasan terbaik :

Seseorang akan melakukan perjalanan dengan kereta kuda dari kota 1 menuju kota 10 melalui beberapa kota dari kota 2 sampai kota 9, melewati daerah berbahaya seperti pada gambar 1. Dia dapat memilih beberapa rute, misalnya melalui kota 1-2-5-8-10 atau 1-3-7-9-10. Setiap penggal jalan mempunyai bahaya yang diukur sebagai besar asuransi jiwa r (x,d) dari kota x ke kota d. Bahaya dari rute tertentu dari kota 1 ke kota 10 diukur dengan besarnya asuransi yang dibayar sepanjang rute tersebut. Biaya asuransi yang harus dibayar dicantumkan pada penggal garis pada gambar 1.



Pemecahan Masalah Kereta Kuda :

Masalah Kereta Kuda ini mudah diselesaikan karena jumlah rute yang dapat dilalui dari kota 1 ke kota 10 jumlahnya terbatas, dimana hanya terdapat 18 kombinasi rute. Setiap kombinasi tersebut besar biaya asuransi totalnya dapat dihitung dengan mudah. Dengan demikian dipilih rute yang memberikan biaya asuransi total yang terendah. dengan meningkatnya permasalah (dengan bertambahnya kota yang dapat dilalui) jumlah rute akan meningkat dengan cepat, serta kalkulasi masing-masing rute akan memakan waktu. Programa Dinamis mengurangi kompleksitas permasalah dengan cara pemecahan persoalan secara bertahap.

Pemecahan masalah dapat dilakukan dengan perhitungan maju atau perhitungan mundur.

Pada pembahasan ini dilakukan perhitungan mundur, yaitu dihitung biaya minimum dari setiap simpul (Kota) ke simpul (Kota) 10 sampai simpul akhir (Kota 1).

Pada beberapa bentuk model programa dinamis yang akan dibahas terdapat notasi yang berlainan, untuk itu digunakan notasi yang paling umum dan mudah.

Lintasan diatas dibagi pada beberapa tahapan (pada persoalan ini 4 tahapan).

Notasi :

n = Menunjukkan jumlah tahapan (lintasan) untuk sampai ke tujuan akhir.

x_n = Kota dimana masih terdapat n tahapan (lintasan) untuk sampai ke tujuan akhir.

Kota x_0 kota 10, Kota x_1 adalah kota 8 dan 9, kota x_2 adalah kota 5,6,7; dst.

d_n = Kota berikutnya dari Kota x_n untuk sampai ke tujuan akhir
Jika x_3 adalah Kota 2 maka d_3 nya adalah Kota 5,6 dan 7.

dn = $x_{n-1} \rightarrow$ Kota x_{n-1} = Kota dn merupakan kota berikutnya dari kota xn untuk sampai ke tujuan akhir

Kota d_3 adalah Kota 5, maka Kota 5 merupakan Kota x_2

r (x_n,d_n) = Biaya asuransi yang harus dibayar dalam menempuh penggal lintasan dari
Kota x_n ke Kota d_n
r (x_3 = Kota 4,d3 Kota 7) = \$ 8
r (x_2 = Kota 6,d2 Kota 8) = \$ 9

f_n (x_n)= Biaya total terbaik dari kota xn sampai ke tujuan berikutnya yang dilalui adalah kota dn dimana biaya dari kota dn ke tujuan akhir adalah biaya optimalnya

$= r (x_n,d_n) + f_n (x_{n-1})$

$f_n (x_n) = d^{min} \{ f_n (x_n,d_n) \} = fn (x_n,d_n{*})$

= Biaya terbaik dari Kota x_n Kota tujuan akhir (Kota 10) adalah biaya yang terbaik dari beberapa lintasan alternatif yang ada dari kota x_n ke Kota tujuan akhir (Kota berikutnya dari Kota xn untuk sampai ke tujuan akhir terdapat beberapa alternatif. Contoh jika x_3 adalah Kota 2 maka Kota berikutnya adalah Kota 5,6,7).

$= f_n (x_n,d_n{*})$

= Biaya terbaik dari kota xn tujuan akhir adalah melalui Kota berikutnya d_n*.

Persoalan di atas diselesaikan dalam tahapan-tahapan dimulai dari tahap 1 dengan menyusun tabel nilai f (x_1) dari berbagai x_1.

Tahap 1 :

Dengan satu tahap untuk sampai ke tujuan akhir, kita berada pada kota x_1, yaitu Kota 8 dan 9. Tujuan berikutnya adalah Kota d_1 adalah Kota 10 (yang merupakan Kota x_0). Dengan demikian nilai f_1 (x_1) adalah seperti pada tabel.

X_1	**d_1**	**f (x_1)**
Kota 8	Kota 10	$ 6
Kota 9	Kota 10	$ 7

Catatan : x0 = d1

Tahap 2 :

Dengan dua tahap untuk sampai pada tujuan akhir kita berada pada kota X_2 yang berupa Kota 5,6,7. Tujuan berikutnya Kota d_2 adalah Kota 8 dan 9. dengan demikian biaya terbaik dari Kota x_2 ke tujuan akhir adalah :

$$f_2\ (x_2) \quad = \quad d^{min}\ \{ f_2\ (f_2,d_2) \} \quad = \ \{ r\ (x_2,d_2) + f_1(x_1) \} \qquad = f_2\ (x_2,d_2^*)$$

d_2 / x_2	{f_2 (f_2,d_2) }= r (x_2,d_2) + f_1 (x_1)			
	8	9	d2	f_2 (x_2)
5	3 + 6 = 9	7 + 7 = 14	8	9
6	9 + 6 = 15	6 + 7 = 13	9	13
7	6 + 6 = 12	6 + 7 = 13	9	12

Catatan : x_0 = d_1

Misalnya f_2 (6,8) = r (x_2 = 6, d_2 = 8) + f_1 (x_1 = 8)

= 0 (dari gambar) + 6 (dari tabel tahap 1) = 15

Dari tabel tahap 2 diatas diperoleh f_2 (x_2) dari berbagai x_2

Tahap 3 :

Dengan tiga tahap untuk sampai pada tujuan akhir kita berada pada kota x_2 yang berupa Kota 5,6, dan 7. Tujuan berikutnya Kota d_3 adalah Kota 5,6, dan 7, dengan demikian biaya terbaik dari Kota x_3 ke tujuan akhir adalah :

$$f_3\ (x_3) \quad = \quad d^{min}\ \{ f_3\ (x_3,d_3) \} = d^{min}\ \{ (x_3,d_3) + f_2\ (x_2) \} = f_3\ (x_3,d_3{}^*)$$

d_3 / x_3	$f_3\ (x_3,d_3) = r(x_3,d_3) + f_2\ (x_2)$				
	5	6	7	d_3	$f_3\ (x_3)$
2	10 + 9 = 19	7 + 13 = 20	9 + 12 = 21	5	19
3	6 + 9 = 15	6 + 13 = 19	7 + 12 = 19	5	15
4	7 + 9 = 16	6 + 13 = 19	8 + 12 = 20	5	16

Catatan : $x_2 = d_4$

Tahap 4 :

Dengan empat tahap untuk sampai pada tujuan akhir kita berada pada kota x4 yang berupa kota 1. Tujuan berikutnya Kota d4 adalah Kota 2,3 dan 4, dengan demikian biaya terbaik dari Kota x4 ke tujuan akhir adalah :

$$f_4\ (x_4) \quad = \quad d^{min}\ \{ f_4\ (x_4,d_4) \} = d^{min}\ \{ r\ (x_4,d_4) + f_3\ (x_3) \} = f_4\ (x_4,d_4{}^*)$$

d_4 / x_4	$f_4\ (x_4,d_4) = r\ (x_4,d_4) + f_3\ (x_3)$				
	2	3	4	$d_4{}^*$	$f_4\ (x_4)$
1	5 + 19 = 24	7 + 15 = 22	6 + 16 = 22	3 atau 4	2

Catatan : $x_3 = d_4$

Terlihat di sini didapat dua nilai optimal yaitu $d_4{}^* = 3$ dan 4, yang menunjukkan terdapat dua alternatif lintasan dari kota 1 menuju 10 yaitu melalui Kota 3 dan 4.

Dengan demikian dengan menggunakan hubungan $x_{n-1} = d_n$ lintasan kita adalah :

	Alternatif 1		Alternatif 2	
n	x_n	d_n	x_n	d_n
4	1	3	1	4
3	3	5	4	5
2	5	8	5	8
1	8	10	8	10
0	10		10	

Prinsip Optimalitas :

Seperti yang terlihat pada persoalan kereta kuda, permasalahan yang digunakan pada pendekatan programa dinamis mempunyai beberapa ciri penting :

Pertama masalah dapat dibagi menjadi beberapa tahap. Pada masing-masing tahap dibutuhkan suatu keputusan kebijaksanaan, yang mempengaruhi keputusan yang telah diambil pada tahap-tahapsebelunya. Contohnya dalam masalah kereta kuda, pada tahap 2 ditentukan bahwa apabila seseorang mulai dari kota 5, rute optimal dari sana menuju tujuan akhir adalah menuju Kota 8 dan terus ke Kota 10. Secara serupa apabila seseorang berawal dari Kota 6 maka rute optimal ke Kota 10 adalah melalui Kota 9.

Kedua, pada masing-masing tahapan didapati sejumlah status alternatif yang menyediakan informasi dimana kita berada dalam proses pengambilan keputusan. Misalnya pada tahap 2 kita dapat berada pada status Kota 5,6, atau 7.

Ketiga, keputusan yang ditetapkan pada setiap tahap mengubah status sekarang menjadi status yang berhubungan dengan tahap berikutnya. Misalnya pada tahap 2 dalam masalah kereta kuda tersebut, berawal dari kota 5 keputusan optimal adalah menuju Kota 8 dari tahap 1.

Keempat, berawal dari status sekarang, kebijaksanaan optimal untuk tahap-tahap berikutnya independen dari kebijaksanaan yang ditetapkan pada tahap sebelumnya. Ini adalah prinsip "optimal yang terkenal oleh R. Bellman, penemu programa dinamis. Misalnya kita mencapai Kota 5 pada tahap 2, rute optimal menuju kota 10 tidak tergantung bagaimana kita mencapai Kota 5 (kita dapat saja mencapai Kota 5 dari Kota 2,3 atau 4).

Kelima, pada setiap status hubungan rekursif digunakan untuk mencari kebijaksanaanoptimal untuk tahap yang tersisa. Hubungan rekursif ini berbentuk :

$$f_n (x_n) = f_n (x_n,d_n^*) = d^{min} \{ (f_n (x_n,d_n) \}$$

$$= d^{min} \{ r (x_n,d_n) + f_{n-1} ({}_{xn-1}) \} \text{ dengan } {}_{xn-1} = d_n$$

Keenam, dengan menggunakan hubungan rekursif, pemecahan optimal permasalahandiperoleh dengan bekerja mundur bertahap mulai dari tahap terakhir (tahap 1) dan mundur sampai tahap awal (tahap n) dicapai.

2. Masalah Alokasi

PT. X memutuskan untuk menambah enam orang tenaga penjualan pada bagian penjualannya. Tenaga kerja yang baru akan ditempatkan pada keempat daerah pemasarannya. Tabel berikut menunjukan kenaikan penjualan yang diharapkan (dalam $ 000) dari setiap daerah pemasaran, tergantung dari jumlah tenaga kerja yang ditugaskan pada daerah tersebut. Tentukan alokasi optimal dari keenam tenaga penjualan baru di keempat daerah pemasaran tersebut.

Daerah Pemasaran	1	2	3	4	5	6
1	80	120	140	140	140	140
2	40	80	120	160	180	200
3	120	160	160	160	160	160
4	40	60	80	80	80	80

Pemecahan masalah alokasi :

Notasi :

d_n = Jumlah tenaga penjualan yang dialokasikan pada daerah pemasaran n n = 1;2;3;4

x_n = Variabel status, adalah jumlah tenaga penjualan yang dialokasikan pada daerah pemasaran 1 sampai daerah pemasaran n n = 1;2;3;4

$$x_n = \underbrace{d_1 + d_2 + \dots\dots\dots + d_{n-1}}_{x_{n-1}} + d_n$$

x_n = $x_{n-1} + d_n \rightarrow d_n = x_n - x_{n-1}$

x_0 = 0 (Karena sampai 0 tenaga kerja yang dialokasikan adalah 0 t.k.)

untuk n = 1 $\rightarrow d_1 = x_1$

$d_n \leq x_n$

$r_n (x_n,d_n)$ = Tambahan pendapatan jika pada daerah n ditempatkan dn tenaga kerja, sedangkan sampai daerah n ditempatkan xn tenaga kerja.

$f_n (x_n)$ = Tambahan pendapatan total jika sampai daerah n ditempatkan tenaga kerja tambahan sebanyak x_n

$f_n (x_n,d_n)$ = $r (x_n,d_n) + f_{n-1} (x_{n-1})$

= Tambahan pendapatan total jika sampai daerah n ditempatkan x_n tenaga kerja sedangkan pada daerah n ditempatkan d_n tenaga kerja.

$f_n (x_n)$ = $d^{maks} \{ f_n (x_n,d_n) \} = f_n (x_n,d_n{*})$

= Tambahan pendapatan total terbaik jika sampai daerah n ditempatkan xn tenaga kerja adalah yang terbaik dari beberapa alternatif kombinasi dimana pada daerah n ditempatkan dn tenaga kerja sedangkan sampai daerah n-1 ditempatkan x_{n-1} tenaga kerja

Tahap 1 :

$f_1 (x_1)$ = $f_1 (x_1,d_1{*}) = d^{maks} f_1 (x_1,d_1)$

= $d^{maks} \{ r_1 (x_1,d_1) + f_0 (x_0) \}$

Perhatikan sel kosong pada tabel dibawah karena kita tidak dapat mengalokasikan tenaga kerja d_1 yang lebih besar atau lebih kecil dari x_1 dan harus tepat = x_1.

$F_0 (x_0)$ = 0

Tabel Perhitungan Tahap I $x_0 = x_1 - d_1$

x_1 \ d_1	$f_1(x_1,d_1) = r_1(x_1,d_1) + f_0(x_0)$							d_1^*	$f_1(x_1)$
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	-	80	-	-	-	-	-	1	80
2	-	-	120	-	-	-	-	2	120
3	-	-	-	140	-	-	-	3	140
4	-	-	-	-	140	-	-	4	140
5	-	-	-	-	-	140	-	5	140
6	-	-	-	-	-	-	140	6	140

Tahap 2 :

$f_2(x_2) = f_2(x_2,d_2^*) = d^{maks} f_2(x_2,d_2)$
$= d^{maks} \{ r_2(x_2,d_2) + f_1(x_1) \}$
$x_1 = x_2 - d_2$
$f_1(x_1) =$ Nilainya diperoleh dari tabel perhitungan pada tahap 1

Tabel Perhitungan Tahap 2 $x_1 = x_2 – d_2$

x_1 \ d_1	$f_2(x_2,d_2) = r_2(x_2,d_2) + f_1(x_1)$							d_2^*	$f_2(x_2)$
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0+0=0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	0+80=80	40+0=40	-	-	-	-	-	0	80
2	0+120=120	40+80=120	80+0=80	-	-	-	-	0,1	120
3	0+140=140	40+120=160	80+80=160	120+0=120	-	-	-	1,2	160
4	0+140=140	40+140=180	80+120=200	120+80=200	160+0=160	-	-	2,3	200
5	0+140=140	40+140=180	80+140=220	120+120=240	160+80=240	180+0=180	-	3,4	240
6	0+140=140	40+140=180	80+140=220	160+140=260	160+120=280	180+80=260	200+0=200	4	280

Tahap 3 :

$f_3(x_3) = f_3(x_3,d_3^*) = d^{maks} f_3(x_3,d_3)$
$= d^{maks} \{ r_3(x_3,d_3) + f_2(x_2) \}$
$x_2 = x_3 - d_3$
$f_2(x_2) =$ Nilainya diperoleh dari tabel perhitungan tahap 2

Tabel Perhitungan Tahap 3 $x_1 = x_3 – d_3$

x_3 \ d_3	$f_3(x_3,d_3) = r_3(x_3,d_3) + f_2(x_2)$							d_3^*	$f_3(x_3)$
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0+0=0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	0+80=80	120+0=120	-	-	-	-	-	1	120
2	0+120=120	120+80=200	160+0=160	-	-	-	-	1	200
3	0+160=160	120+160=240	160+80=240	160+0=160	-	-	-	1,2	240
4	0+200=200	120+160=280	160+120=280	160+80=240	160+0=160	-	-	1,2	280
5	0+240=240	120+200=320	160+160=320	160+120=280	160+80=240	160+0=160	-	1,2	320
6	0+280=240	120+240=360	160+200=360	160+160=320	160+80=240	180+80=240	160+0=160	1,2	360

Tahap 4 :

$f_4(x_4) = f_4(x_4,d_4^*) = d^{maks}\, f_4(x_4,d_4)$
$= d^{maks}\{ r_4(x_4,d_4) + f_3(x_3) \}$

$x_3 = x_4 - d_4$

$f_3(x_3) =$ Nilai diperoleh dari tabel perhitungan pada tahap 3

Tabel di bawah ini hanya mempunyai satu baris yaitu $x_4 = 6$, karena kita harus mengalokasikan keenam tenaga penjualan pada keempat daerah pemasaran.

Tabel Perhitungan Tahap 4 $x_3 = x_4 – d_4$

x_4 \ d_4	$f_4(x_4,d_4) = r_4(x_4,d_4) + f_3(x_3)$							d_4^*	$f_4(x_4)$
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0+360=360	40+320=360	60+280=340	80+240=320	80+200=280	80+120=200	80+0=80	0,1	360

Dari tabel diatas dapat disimpulkan bahwa peningkatan maksimum dari pendapatan penjualan adalah \$ 360.000.

Peningkatan ini dimungkinkan dengan beberapa alternatifalokasi optimal. Terdapat delapan alokasi optimal seperti terlihat pada tabel dibawah ini.

Penyusunan tabel dengan menggunakan cara :

$x_4 = 6$ dari tabel tahap 4 untuk $x_4 = 6$ diperoleh $d_4^* = 0$ atau 1
$x_3 = x_4 - d_4 = 6 - 0 = 6$ dari tabel tahap 3 untuk $x_3 = 6$ diperoleh $d_3^* = 1$ atau 2
$x_2 = x_3 – d_3 = 6 - 1 = 5$ dari tabel tahap 2 untuk $x_2 = 5$ diperoleh $d_2^* = 3$ atau 4
$x_3 = x_4 - d_4 = 5 - 3 = 2$ dari tabel tahap 1 untuk $x_1 = 2$ diperoleh $d_1^* = 2$

Untuk alternatif lainnya perhitungan dengan cara yang sama dilakukan menggunakan nilai dn* alternatifnya. Hasilnya ditabulasi pada tabel berikut :

Daerah Pemasaran 1	Daerah Pemasaran 2	Daerah Pemasaran 3	Daerah Pemasaran 4
2	3	1	0
1	4	1	0
2	2	2	0
1	3	2	0
2	2	1	1
1	3	1	1
2	1	2	1
1	2	2	1

3. Masalah Produksi - Persediaan

PT. Y memperoleh transformator besar untuk keperluan jaringan listrik. Permintaan yang harus dipenuhi untuk bulan-bulan mendatang pada tabel berikut :

Bulan	**Mei**	**Juni**	**Juli**	**Agustus**
Jumlah Permintaan	30	40	20	30

Transformator yang diminta harus dikirim pada akhir setiap bulan. Misalnya permintaan 30 unit transformator untuk bulan Mei harus dikirim pada akhir bulan Mei. Biaya produksi transformator tergantung pada jumlah unit yang diproduksi seperti digambarkan pada tabel

Jumlah Produksi (unit)	0	10	20	30	40
Biaya Produksi ($ 000)	0	7	9	10	11

Kapasitas gudang untuk menyimpan transformator adalah 30 unit. Transformator yang tidak dikirim dalam bulan yang sama dapat disimpan dalam gudang dengan biaya $ 100 per unit per bulan. Persediaan pada awal bulan Mei adalah 20 unit dan persediaan pada awal bulan September ditetapkan sebesar 0 unit. Untuk praktisnya transformator hanya dapat diproduksi, dikirm dan disimpan dalam jumlah kelipatan 10 unit.

Persiapan jadual produksi-produksi yang meminimalkan biaya total untuk memenuhi permintaan.

Pemecahan Persoalan :

Penyelesaian persoalan ini dilakukan dengan perhitungan mundur, dengan tahapannya adalah bulan.

n = Bulan ke n bulan Agustus n = 1, Juli n = 2 dan seterusnya.

d_n = Jumlah produksi pada bulan n.

x_n = Jumlah persediaan yang masuk pada bulan n

x_4 = 20 (Persediaan yang masuk bulan Mei ditetapkan 20 unit)

x_0 = 0 (Persediaan yang masuk bulan September ditetapkan 0 unit)

D_n = Jumlah perminaatn yang harus dipenuhi pada bulan n

Jumlah persediaan yang masuk pada bulan berikutnya adalah jumlah persediaan yang masuk pada bulan tersebut ditambah jumlah produksi pada bulan tersebut dikurangi dengan jumlah permintaan yang harus dipenuhi pada bulan tersebut ---->

Xn-1	=	Xn	+	dn	-	Dn
Persediaan pada Awal bulan n-1	=	Persediaan pada awal bulan n	+	Produksi pada bulan n	-	Permintaan pada bulan n

Kendala gudang : Kapasitas gudang maksimum 30 unit

$0 \leq x_n \leq 30$

Kendala produksi : Jumlah persediaan + produksi harus sama atau lebih besar dibandingkan permintaan

$D_n \leq x_n + d_n$

c (d_n) = Biaya produksi pada bulan n jika jumlah yang diproduksi sebanyak d_n

Biaya persediaan yang masuk pada bulan n jika jumlah persediaan yang masuk adalah x_n = biaya persediaan per unit x jumlah persediaan = $^1/_{10}\ x_n$

(= $ 1/10 ribu per unit)

Biaya total mulai bulan ke n sampai bulan ke 1 = biaya produksi pada bulan tersebut + biaya persediaan pada bulan tersebut + biaya total dari bulan ke n-1 sampai bulan ke 1

(Catatan : perhitungan mundur)

$f_n (x_n)$ = Biaya total produksi dan persediaan yang terbaik jika persediaan yang masuk pada bulan n adalah x_n adalah biaya produksi pada bulan tersebut ditambah biaya persediaan pada bulan tersebut ditambah biaya total produksi dan persediaan yang terbaik pada bulan berikutnya sampai bulan ke 1

Tahap 1 (bulan Agustus) :

$X_0 = x_1 + d_1 – D_1 \qquad d_1 = D_1 – x_1 = 30 – x_1$

$X_0 = 0$

$f_1 (x_1) = d^{min} \{ c (d_1) + 1/10x_1 + f_0 (x_0) \}$

Oleh karena $d_1 = 30 – x_1$, maka kombinasi diluar itu adalah tak mungkin. Contoh pada x_1 = 0 diperoleh d_1 = 30. Dengan demikian untuk d_1 = 0,10,20 dan 40 adalah tidak mungkin. Hal ini terlihat pada tabel kombinasi tersebut biayanya adalah “ **-** “ yang berarti tidak mungkin.

Tabel : Hasil Perhitungan Tahap 1

x_1 \ d_1	$f_1 (x_1,d_1) = c (d_1) + 1/10x_1$					d_1*	$f_1 (x_1)$
	0	10	20	30	40		
0	-	-	-	10+1/10x0=10	-	30	10
10	-	-	9+1/10x10=10	-	-	20	10
20	-	7+1/10x20=9	-	-	-	10	9
30	0+1/10x10=3	-	-	-	-	0	3

Tahap 2 (bulan Juli):

$f_2\ (x_2) =$ dmin { (c (d_2) + 1/10 x_2 + $f_1\ (x_1)$ }

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & = x_2 + d_2 - D_2 \\ D_2 & = 20 \end{array}\right\} x_1 = x_2 + d_2 - 20 \rightarrow$$ Kombinasi ini harus dipenuhi, jika tidak maka tidak terdapat biaya yang mungkin

Nilai $f_1\ (x_1)$ diperoleh dari tabel tahap 1 di atas

Contoh perhitungan :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pada } x_2 & = 20 \\ d_2 & = 0 \end{array}\right\} \quad x_1 = 20 + 0 - 20 = 0 \rightarrow \text{ Layak}$$

Pada x_2 = 20

$f_2\ (x_2,d_2) =$ c (d_2) + 1/10x_2 + $f_1\ (x_1)$

0 + 1/10 x 29 + 10 = 12

Untuk x_2 dan d_2 yang lain hasilnya di tabulasi pada tabel :

Tabel : Hasil Perhitungan Tahap 2

d_2 / x_2	$f_2\ (x_2,d_2) = c\ (d_2) + 1/10x_2 + f_1\ (x_1)$					d_2*	$f_2\ (x_2)$
	0	10	20	30	40		
0	-	-	19	20	20	20	19
10	-	18	20	20	15	40	15
20	12	19	20	15	-	0	12
30	13	19	15	-	-	0	13

Tahap 3 (bulan Juni)

$f_3\ (x_3)$ = d^{min} { c (d_3) + 1/10x_3 + $f_2\ (x_2)$ }

$$\left.\begin{array}{ll} x_2 & = x_3 + d_3 - D_3 \\ D_3 & = 40 \end{array}\right\} x_2 = x_3 + d_3 - 40 \rightarrow$$ Kombinasi ini harus dipenuhi, jika tidak maka tidak terdapat biaya yang mungkin

Nilai $f_2\ (x_2)$ diperoleh dari tabel tahap 2 di atas.

Hasil perhitungan tahap 3 menggunakan ketentuan diatas di tabulasi pada tabel berikut :

Tabel : Hasil Perhitungan Tahap 3

d_3 / x_3	$f_3(x_3,d_3) = c(d_3) + 1/10x_3 + f_2(x_2)$					d_3^*	$f_3(x_3)$
	0	10	20	30	40		
0	-	-	-	-	30	40	30
10	-	-	-	30	27	40	27
20	-	-	30	27	25	40	25
30	-	29	27	25	27	30	25

Tahap 4 (bulan Mei)

$f_4(x_4) \quad = \quad d^{min} \{ c(d_4) + 1/10x_4 + f_3(x_3) \}$

$x_3 \quad = \quad x_4 + d_4 - D_4$

$D_3 \quad = \quad 30$

$X_4 \quad = \quad 20$

(persediaan bln Mei)

$\left.\right\}$ $x_3 = 20 + d_4 - 30 \rightarrow$ Kombinasi ini harus dipenuhi, jika tidak

$= d_4 - 10$ maka tidak terdapat biaya yang mungkin

Nilai $f_3(x_3)$ diperoleh dari tabel tahap 3 di atas.

Hasil perhitungan tahap 4 menggunakan ketentuan diatas di tabulasi pada tabel berikut :

Tabel : Hasil Perhitungan Tahap 4

d_4 / x_4	$f_4(x_4,d_4) = c(d_4) + 1/10x_4 + f_3(x_3)$					d_4^*	$f_4(x_4)$
	0	10	20	30	40		
20	-	39	38	37	38	30	37

Dari Tabel di atas dapat disimpulkan bahwa biaya produksi dan persediaan adalah sebesar $37.000, sedangkan alokasi produksi dan persediaan yang memberikan nilai optimal tersebut adalah menggunakan hubungan :

$$x_{n-1} = x_n + d_n + D_n$$

n	Bulan	Tingkat persediaan x_n	Jumlah produksi d_n	Permintaan D_n
4	Mei	20	30	30
3	Juni	20	40	40
2	Juli	20	0	20
1	Agustus	0	30	30

Ringkasan :

Dalam bagian ini telah diberikan contoh dari model programa dinamis yang berlainan yang menggambarkan proses pengambilan keputusan proses bertahap banyak. seperti terlihat pada contoh di atas, masalah programa dinamis biasanya menghasilkan model-model matematis yang berbeda. Permasalahan yang dipecahkan pada bab ini seringkali terjadi pada keadaan nyata dan juga mewakili semua jenis masalah yang ditemukan dalam literature sebagai masalah programa dinamis.

Sejumlah konsep telah diperkenalkan dalam diskusi dan presentasi dari contoh-contoh di atas. Konsep dari status, tahap dan hubungan yang rekursif telah dijelaskan dalam masing-masing contoh, yang umum pada semua masalah programa dinamis. Variabel status telah dipertimbangkan dalam kasus deterministic dan struktur matematis dari hubungan rekursif dapat berubah. Untuk memformulasikan masalah programa dinamis, harus dimiliki pengertian yang jelas dari konsep kebijaksanaan optimal dan variabel keputusan dan juga alasan penggunaan rekursi terbalik juga harus dimengerti dengan jelas.

Model Pemuatan Barang

Model Pemuatan barang berurusan dengan pemuatan barang ke tempat dengan kapasitas volume dan berat yang terbatas. Setiap barang menghasilkan suatu tingkat pendapatan. Tujuannya adalah memuat barang yang memberikan nilai yang terbaik.

Model ini juga disebut sebagai persoalan *fly-away kit*, di mana pilot harus menentukan barang yang paling bernilai yang akan dimasukkan ke dalam pesawat terbang dan persoalan *knapsack,* di mana seorang serdadu (atau seorang pengelana) harus menentukan barang yang paling bernilai yang akan dimasukkan ke dalam ranselnya. Persamaan menghitung mundur dikembangkan untuk persoalan umum dari n buah barang pada kapal W ton.

Maks. $Z = r_1m_1 + r_2m_2 + \ldots\ldots\ldots + r_nm_n$
d. k. $w_1m_1 + w_2m_2 + \ldots\ldots\ldots + w_nm_n \leq W$
$m_1;\ m_2;\ m_n \geq 0$
m_i = jumlah unit dari barang i pada muatan

Ketiga komponen dari model adalah :

1. Tahap i diwakili oleh barang i, i = 1, 2, …… , n
2. Berbagai alternatif pada tahap i diwakili oleh m_i, jumlah unit barang i yang ditempatkan. Pendapatannya adalah r_im_i. Didefinisikan $[W/w_1]$ adalah bilangan integer yang lebih kecil atau sama dengan W/w_1, di mana $m_1 = 1, \ldots\ldots, [W/w_1]$
3. Keadaan pada tahap i ditunjukkan oleh x_i berat total yang ditugaskan terhadap tahap (barang) i, i + 1, ... , dan n. Definisi ini menggambarkan kenyataan bahwa kendala berat adalah satu-satunya kendala yang berkaitan dengan n tahap secara bersama-sama.

Definsi :

$f_i(x_i)$ = Pendapatan maksimum untuk tahap i, i + 1, ... , n yang diberikan oleh keadaan x_i.

Cara yang paling sederhana untuk menentukan persamaan yang berulang adalah prosedur dua langkah :

Langkah 1. Nyatakan $f_i(x_i)$ sebagai fungsi dari $f_i(x_{i+1})$ sebagai berikut :

$$f_i(x_i) = \text{maks. } \{r_1m_1 + f_{i+1}(x_{i+1})\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$m_i = 0,1, \ldots, W/w_i$$
$$x_i = 0, 1, W$$
dengan $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

Langkah 2. Nyatakan x_{i+1} sebagai fungsi dari x_i untuk menjamin ruas kiri dari $f_i(x_i)$ hanya merupakan fungsi dari x_i.

Secara definisi x_i - x_{i+1} mewakili berat yang dipakai pada tahap i yaitu $x_i - x_{i+1} = w_im_i$, atau $x_{i+1} = x_i - w_im_i$

Jadi persamaan berulang yang sesuai adalah :

$$f_i(x_i) = \text{maks. } \{r_i m_i + f_i(x_i - w_i m_i)\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$m_i = 0, 1, \ldots, [W/w_i]$$
$$x_i = 0, 1, \ldots, W$$

Contoh :

Kapal dengan ukuran 4 ton akan dimuati 1 unit atau lebih dari tiga macam barang. Pada tabel berikut diberikan berat per unit (w_i ton) dan nilai per unit (r_i ribu \$) dari barang i. Berapa jumlah setiap barang akan dimuat ke dalam kapal yang memberikan pendapatan total terbesar?

Barang i	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Oleh karena berat w_i dan muatan maksimum W semuanya dianggap bilangan integer, keadaan x_i dapat dianggap hanya bilangan bulat.

Tahap 3 :

Berat yang tepat yang dialokasikan pada tahap 3 (barang 3) tidak diketahui sebelumnya, tetapi harus dianggap salah satu dari nilai 0, 1, . . . , 4 (karena W = 4 ton). Keadaan $x_3 = 0$ dan $x_3 = 4$ berturut-turut mewakili keadaan ekstrim dari tidak mengirim sama sekali barang 3 sampai hanya mengirim barang 3. Nilai x_3 = 1, 2, dan 3 berarti sebagian kapasitas kapal dialokasikan untuk barang 3. Sebagai akibatnya rentang nilai x_3 menggambarkan jumlah alokasi yang mungkin dari barang 3 pada kapal.

Oleh karena $w_3 = 1$ per ton per unit, maka jumlah barang 3 yang dapat diangkut oleh kapal paling banyak adalah [4/1] = 4, berarti besar nilai m_3 adalah 0, 1, 2, 3, 4. Nilai m_3 yang layak jika nilai $w_3 m_3 \leq x_3$ sedangkan alternatif yang tidak layak (di mana $w_3 m_3 \geq x_3$) tidak diperhitungkan.

Persamaan berikut adalah dasar untuk memperbandingkan alternatif tahap 3 :

$$f_3(x_3) = \underset{m_2}{\text{maks.}} \{14 m_3\},\ \text{maks. } m_3 = [4/1] = 4$$

Tabel tahap 3 :

	$14m_3$					Penyelesaian optimal	
x_3	$m_3 = 0$	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$m_3 = 4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	-	-	-	-	0	0
1	-	14	-	-	-	14	1
2	-	-	28	-	-	28	2
3	-	-	-	42	-	42	3
4	-	-	-	-	56	56	4

Tahap 2 :

$$f_2(x_2) = \underset{m_2}{\text{maks.}} \ \{47m_2 + f_3(x_3)\}$$

$$= \underset{m_2}{\text{maks.}} \ \{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}, \text{ maks. } m_2 = [4/3] = 1$$

	$47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$		Penyelesaian optimal	
x_2	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0 + 0 = 0	-	0	0
1	0 + 14 = 14	-	14	0
2	0 + 28 = 28	-	28	0
3	0 + 42 = 42	47 + 0 = 47	47	1
4	0 + 56 = 56	47 + 14 = 61	56	1

Tahap 1 :

$$f_1(x_1) = \underset{m_1}{\text{maks.}} \ \{31m_1 + f_2(x_2)\}$$

$$= \underset{m_1}{\text{maks.}} \ \{31m_1 + f_2(x_1 - 3m_1)\}, \text{ maks. } m_1 = [4/2] = 2$$

	$31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)$			Penyelesaian optimal	
x_1	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_2(x_2)$	m_1^*
0	0 + 0 = 0	-	-	0	0
1	0 + 14= 14	-	-	14	0
2	0 + 28 = 28	31 + 0 = 31	-	31	1
3	0 + 47 = 47	31 + 14 = 45	-	47	0
4	0 + 61 = 61	31 + 28 = 59	62 + 0 = 62	62	2

Perhitungan pada tahap 1 cukup pada $x_1 = 4$, karena kapasitas kapal adalah 4 ton, sedangkan untuk x_1 =0, 1, 2, 3 sebenarnya tidak perlu dihitung. Kegunaan nya adalah untuk analisa kepekaan, yaitu jika kapasitasnya kurang dari 4 ton.

Pada persoalan ini diperoleh penyelesaian sbb. :

$x_{i+1} = x_i - w_i m_i$

$x_1 = 4 \rightarrow m_1^* = 2$

$x_2 = x_1 - 2m_1 = 4 - 2 \times 2 = 0 \rightarrow m_2^* = 0$

$x_3 = x_2 - 3m_2 = 0 - 3 \times 0 = 0 \rightarrow m_3^* = 0$

Model Jumlah Tenaga Kerja

Pada sejumlah proyek konstruksi penambahan dan pengurangan tenaga kerja sering dilakukan untuk mempertahankan jumlah tenaga kerja agar sesuai dengan kebutuhan proyek. Penambahan tenaga kerja dan pengurangan tenaga kerja keduanya menimbulkan biaya tambahan. Bila kita mengalami kekurangan tenaga kerja, maka penambahan tenaga kerja tersebut menimbulkan biaya rekrutmen dan pelatihan sedangkan bila kita pertahankan jumlah tenaga kerja sedangkan Bila kita mempunyai kelebihan tenaga kerja agar pada saat terjadi kenaikan kebutuhan tenaga kerja tidak perlu melakukan rekrutmen dan pelatihan akan timbul biaya penggajian tenaga kerja yang menganggur.

Andaikan sebuah proyek yang akan dilaksanakan dalam waktu n minggu. Jumlah tenaga kerja minimum yang dibutuhkan pada minggu i adalah sebanyak b_i. Pada kondisi ideal dibutuhkan tenaga kerja sebanyak tepat b_i. Namun tergantung pada parameter biaya mungkin lebih ekonomis untuk membiarkan jumlah tenaga kerja berada di atas atau di bawah kebutuhan minimum. Jika x_i adalah jumlah tenaga kerja sesungguhnya yang dipekerjakan pada minggu i, dua biaya yang dapat terjadi pada minggu i, adalah 1) $c_1(x_i - b_i)$, yaitu biaya kelebihan tenaga kerja sebanyak $x_i - b_i$ orang dan 2) $c_2(x_i - x_{i-1})$, yaitu biaya penambahan tenaga kerja tambahan sebanyak $x_i - x_{i-1}$.

Komponen dari model Programa Dinamis pada persoalan ini didefinisikan sbb. :

1. Tahap i mewakili oleh minggu i, untuk i = 1, 2, . . . , n
2. Alternatif pada tahap i adalah x_i, yaitu jumlah tenaga kerja pada minggu i.
3. Keadaan pada tahap i diwakili oleh jumlah tenaga kerja pada tahap (mg) i -1, x_{i-1}.

Persamaan Programa Dinamis yang berulang adalah :

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i} \{c_1(x_i - b_i) + c_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}$$

dengan $f_{n+1}(x_n) = 0$. Perhitungan dimulai pada tahap n dengan $x_n = b_n$ dan berakhir pada tahap 1.

Contoh :

Sebuah kontraktor memperkirakan kebutuhan tenaga kerja yang diperlukan untuk 5 minggu yang akan dating berturut-turut sebanyak 5, 7, 8, 4, dan 6 orang. Kelebihan tenaga kerja memberikan biaya sebesar \$ 300 per orang per minggu sedangkan untuk menambah tenaga kerja diperlukan biaya tetap sebesar \$ 400 dan biaya variabel sebesar \$ 200 per orang per minggu.
Menyatakan biaya dalam ratusan dollar kita peroleh :

Jumlah t. k. $b_1 = 5$; $b_2 = 7$; $b_3 = 8$; $b_4 = 4$; $b_5 = 6$
Biaya kelebihan t. k. $c_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i)$ untuk $x_i > b_i$ $i = 1, 2, \ldots, 5$
Biaya tambahan t. k. $c_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1})$ untuk $x_i > x_{i-1}$ $i = 1, 2, \ldots, 5$

Tahap 5 ($b_5 = 6$)

	$c_1(x_5 - 6) + c_2(x_5 - x_4)$	Penyelesaian optimal	
x_4	$x_5 = 6$	$f5(x_4)$	x_5^*
4	3(6-6) + 4 + 2(6-4)= 8	8	6
5	3(6-6) + 4 + 2(6-5)= 6	6	6
6	3(6-6) + 4 + 2(6-6)= 0	0	6

Tahap 4 ($b_4 = 4$)

	$c_1(x_4 - 4) + c_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)$			Penyelesaian optimal	
x_3	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	$f_4(x_3)$	x_4^*
8	3.0+0+8=8	3.1+0+6=9	3.2+0+0=6	6	6

Tahap 3 ($b_3 = 8$)

	$c_1(x_3 - 8) + c_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)$	Penyelesaian optimal	
x_2	$X_3 = 8$	$f_3(x_2)$	x_3^*
7	3.0 + 4 + 2.1 + 6 = 12	12	8
8	3.0 + 0 + 6 = 6	6	8

Tahap 2 ($b_2 = 7$)

	$c_1(x_2 - 7) + c_2(x_2 - x_1) + f_3(x_2)$		Penyelesaian optimal	
x_1	$x_2 = 7$	$x_2 = 8$	$f_2(x_1)$	x_2^*
5	3.0+4+2.2+12=20	3.1+4+2.3+6=19	19	8
6	3.0+4+2.1+12=18	3.1+4+2.2+6=17	17	8
7	3.0+0 +12=12	3.1+4+2.1+6=15	12	7
8	3.0+0 +12=12	3.1+0+ +6= 9	9	8

Tahap 1 ($b_1 = 5$)

	$c_1 (x_1 - 5)+c_2 (x_1 - x_0) + f_2(x_1)$				Penyelesaian optimal	
x_0	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	x_1^*
0	3.0+4+2.5+19=33	3.1+4+2.6+17=36	3.2+4+2.7+12=36	3.2+4+ 2.8+9=35	33	5

Penyelesaian optimal dari persoalan di atas :

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1^* = 5 \rightarrow x_2 = 8 \rightarrow x_3^* = 8 \rightarrow x_4 = 6 \rightarrow x_5^* = 6$$

Penyelesaian di atas diterjemahkan sebagai rencana berikut :

Minggu ke i	Jumlah tenaga kerja minimum (b_i)	Jumlah tenaga kerja yang disediakan (x_i)	Keputusan
1	5	5	Terima 5 t. k.
2	7	8	Terima 3 t. k.
3	8	8	Tdk ada perubahan
4	4	6	Pecat 2 t. k.
5	6	6	Tdak ada perubahan

Model Penggantian peralatan

Makin lama peralatan beroperasi makin tinggi biaya pemeliharaannya dan makin rendah tingkat produktifitasnya. Setelah mencapai umur tertentu mungkin lebih ekonomis untuk menggantinya. Persoalannya adalah menentukan umur ekonomis dari peralatan.

Misalkan kita ingin mempelajari persoalan penggantian peralatan untuk periode pemakaian n tahun. Setiap awal tahun kita memutuskan apakah kita akan mempertahankan mesin untuk beroperasi atau mempertahankan satu tahun lagi atau menggantinya dengan yang baru. r(t) mewakili pendapatan pada tahun ke t, c(t) biaya operasi dari peralatan yang berumur t tahun, dan s(t) adalah nilai sisa dari mesin yang telah beroperasi selama t tahun. Harga peralatan baru adalah I

Komponen dari Model Programa Dinamis di sini adalah :

1. Tahap i mewakili tahun ke i, untuk i = 1, 2, . . . , n
2. Alternatif untuk tahap (tahun) ke i adalah mempertahankan atau mengganti peralatan pada awal tahun ke i.
3. Keadaan pada tahap i adalah umur peralatan pada awal tahun ke i.

Definisi :

$f_i(t)$ = pendapatan bersih untuk tahun ke i, i + 1, ... , n

pada saat mesin berumur t tahun pada awal tahun ke i.

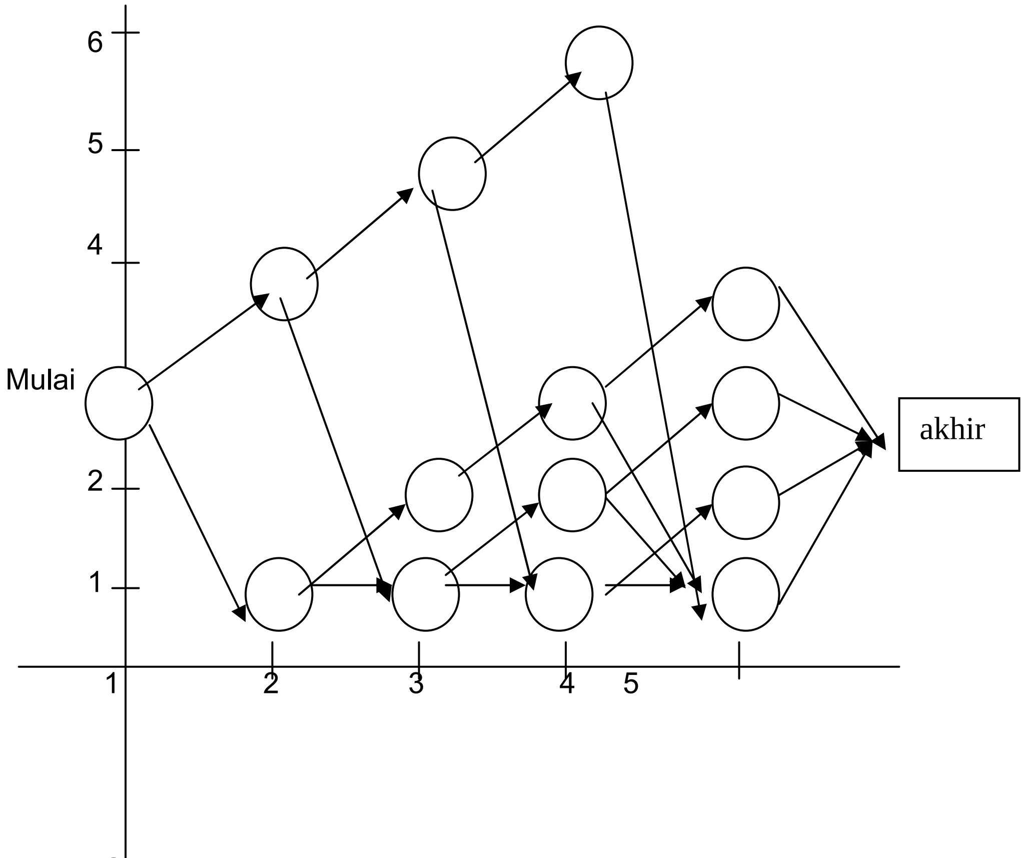
Persamaan yang berulang adalah :

$$f_i(t) = \text{maks.} \begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1) & \text{Jika peralatan dipertahankan} \\ R(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(t+1) & \text{Jika peralatan diganti} \end{cases}$$

Contoh :

Sebuah perusahaan ingin menentukan kebijaksanaan penggantian yang optimal dari peralatan yang saat ini berumur 3 tahun untuk keperluan pemakaian 4 tahun yang akan dating (n = 4) yaitu sampai awl tahun ke 5. Tabel berikut adalah data dari persoalan. Perusahaan menentukan peralatan yang berumur 6 tahun harus diganti. Harga peralatan baru adalah $ 100.000.

Umur, t (tahun)	Pendapatan, r(t) ($)	Biaya operasi, c(t) ($)	Nilai sisa, s(t) ($)
0	20.000	200	-
1	19.000	600	80.000
2	18.500	1200	60.000
3	17.200	1500	50.000
4	15.500	1700	30.000
5	14.000	1800	10.000
6	12.200	2200	5.000



Gambar di atas mewakili persoalan kita. Pada awal tahun pertama kita memiliki peralatan yang berumur 3 tahun. Kita dapat menggantinya (R = replace) atau mempertahankannya (K = keep). Pada awal tahun kedua jika peralatan diganti maka peralatan kita berumur 1 tahun sedangkan jika peralatan dipertahankan peralatan kita berumur 4 tahun. Hal yang sama dapat kita lihat pada awal tahun ketiga sampai tahun keempat. Jika peralatan yang berumur 1 tahun pada awal tahun kedua dan ketiga diganti, maka penggantinya akan berumur 1 tahun pada tahun berikutnya. Pada awal tahun keempat mesin yang berumur 6 tahun harus diganti.. Pada akhir tahun ketiga kita menjual peralatan tersebut. Jaringan memperlihatkan pada awal tahun kedua umur yang mungkin dari peralatan adalah 1 dan 4 tahun, untuk awal tahun ketiga adalah 1, 2 dan 5 tahun dan untuk awal tahun keempat adalah 1, 2, 3 dan 6 tahun.

Penyelesaian dari jaringan tersebut adalah ekivalen dengan mencari rute terpanjang dari awal tahun pertama sampai akhir tahun keempat. Perhitungannya diperlihatkan pada tabel berikut :

Tahap 4

	K	R	Penyelesaian optimal	
t	r(t)+s(t+1)-c(t)	r(0)+s(t)+s(1)-c(0)-I	$f_4(t)$	Keputusan
1	19,0+60- 0,6=78,4	20+80+80-0,2-100=79,8	79,8	R
2	18,5+50-1,2=67,3	20+60+80-0,2-100=59,8	67,3	K
3	17,2+30-1,5=45,7	20+50+80-0,2-100=49,8	49,8	R
6	Harus diganti	20+5+80-0,2-100=4,8	4,8	R

Tahap 3

	K	R	Penyelesaian optimal	
t	r(t)-c(t)+f_4(t+1)	r(0)+s(t)+s(1)-c(0)-I+f_4(1)	$f_4(t)$	Keputusan
1	19,0-0,6+67,3=85,7	20+80-,2-100-79,8=79,6	85,7	K
2	18,5-1,2+49,8=67,1	20+60-,2-100-79,8=59,6	67,1	K
5	14,0-1,8+4,8=17,0	20+10-,2-100-79,8=19,6	19,6	R

Tahap 2

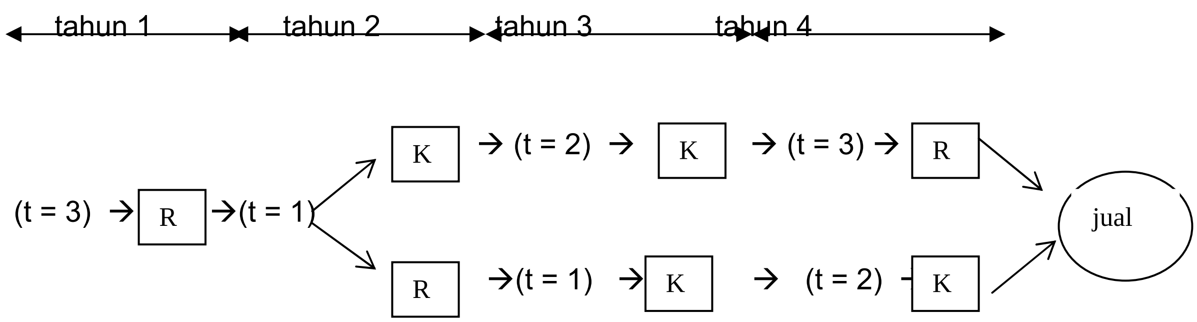
	K	R	Penyelesaian optimal	
t	r(t)-c(t)+f_3(t+1)	r(0)+s(t)+s(1)-c(0)-I+f_3(1)	$f_4(t)$	Keputusan
1	19,0-0,6+67,1=85,5	20+80-,2-100+85,7=85,5	85,5	K atau R
4	15,5-1,7+19,6=33,4	20+30-,2-100+85,7=35,5	35,5	R

Tahap 1

	K	R	Penyelesaian optimal	
t	r(t)-c(t)+f_3(t+1)	r(0)+s(t)+s(1)-c(0)-I+f_3(1)	$f_4(t)$	Keputusan
3	17,2-1,5+35,5=51,2	20+50-,2-100+85,5=55,3	55,3	*R*

Peneyelesaian :

Tahap 1 pada awal tahun pertama diperoleh t = 3 adalah mengganti peralatan (R). Dengan demikian pada tahap 2 yaitu awal tahun 2 peralatan yang diganti berumur 1 tahun → t = 1 pada tabel tahap 2 terlihat keputusan optimalnya adalah mempertahankan (K) atau mengganti (R) peralatan. Dengan demikian terdapat dua alternatif. Sekarang kita lihat alternatif mempertahankan. Umur peralatan yang dipertahankan pada awal tahun 3 (tahap 3) adalah 2 tahun. Pada tabel tahap 3 untuk t = 2 keputusan terbaiknya adalah mempertahankan peralatan. Pada awal tahun 4 (tahap 4) umur peralatan yang dipertahankan adalah 3 tahun. Pada tabel tahap 4 untuk t = 2 keputusan terbaiknya adalah mengganti peralatan.. Dengan cara yang sama penyelesaian alternatifnya dapat dilihat seperti pada gambar di bawah ini :



Dengan demikian keputusan optimal dari persoalan di atas adalah :

Alternatif 1 : (R, K, K, R) dan

Alternatif 2 : (R, R, K, K).

Model Investasi

Andaikan kita ingin melakukan investasi sebesar P_1, P_2, . . . , P_n pada setiap awal tahun sampai tahun ke n pada dua buah bank. Bank 1 memberikan bunga sebesar r_1 dan bank 2 memberikan bunga sebesar r_2 per tahun.Untuk merangsang deposito kedua bank tersebut memberikan bonus terhadap investasi baru yang dilakukan sebesar persentasi tertentu. Persentase tersebut bervariasi setiap tahunnya. Bonus yang diberikan oleh bank 1 pada tahun i adalah sebesar q_{i1} dan bank 2 memberikan bonus sebesar q_{i2}. Bonus tersebut jatuh tempo pada akhir tahun di mana deposito tersebut dilakukan dan dapat diinvestasikan kembali pada salah satu dari kedua bank tersebut pada tahun berikutnya. Hal ini berarti hanya bonus dan uang segar yang dapat diinvestasikan pada kedua bank tadi, namun jika suatu investasi dilakukan maka uang tersebut harus tetap berada pada bank sampai akhir tahun ke n.

Berikan jadual investasi selama n tahun yang akan datang.

Komponen dari Model Programa Dinamis pada persoalan ini adalah :

1. Tahap i diwakili oleh tahun ke i, $i = 1, 2, \ldots, n$
2. Alternatif pada tahap i adalah I_i, dan $\bar{I}_i$ jumlah yang diinvestasikan ke dalam bank 1 dan 2.
3. Keadaan x_i, pada tahap i diwakili oleh jumlah modal yang tersedia untuk diinvestasikan pada awal tahun ke i.

   $\bar{I}_i = x_i - I_i$, dengan demikian :

   $x_i = P_i + q_{i-1,1}I_{i-1} + q_{i-1,2}(x_{i-1} - I_{i-1})$

   $\quad = P_i + (q_{i-1,1} - q_{i-1,2})I_{i-1} + q_{i-1,2}x_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$

dengan $x_1 = P_1$. Investasi kembali sejumlah x_i termasuk hanya investasi baru pada tahun ke i ditambah setiap bonus dari investasi yang dibuat pada tahun sebelumnya.

Definisi :

$f_i(x_i)$ = nilai optimal dari investasi untuk tahun ke i, i + 1, . . . , dan n.

x_i diberikan pada awal tahun ke i.

s_i = akumulasi dari jumlah dana pada akhir tahun i.

I_i dan $(x_i\text{-}I_i)$ adalah investasi yang dibuat pada tahun i pada bank 1 dan 2

$\alpha_i = (1 + r_i)$ untuk bank i = 1, 2

Persoalan dapat dinyatakan sebagai :

$$\text{Maks. } z = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

Dengan :

$$s_i = I_i\alpha_1^{n+1-i} + (x_i - I_i)\alpha_2^{n+1-I}$$

$$= (\alpha_1^{n+1-i} + \alpha_2^{n+1-i})\, I_i + \alpha_2^{n+1-i}x_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$s_n = (\alpha_1 + q_{n1} + \alpha_2 + q_{n2})I_n + (\alpha_2 + q_{n2})x_n$$

q_{n1} dan q_{n2} ditambahkan pada s_n karena bonus untuk tahun ke n adalah bagian dari akumulasi akhir dari jumlah unag yang diinvestasikan.

Persamaan berulang dari Programa dinamis menghitung mundur diberikan sebagai :

$$f_i(x_i) = \underset{0 \le I_i \le x_i}{\text{maks.}} \{s_i + f_{n+1}(x_{i+1})\} \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

dengan x_{i+1} didefinisikan seperti x_i sebelumnya dan $f_{n+1}(x_{i+1}) = 0$

contoh :

Andaikan Saudara akan menginvestasikan saat ini \$ 4.000 dan \$ 2.000 pada awal tahun 2 sampai awal tahun 4. Tingkat suku bunga yang diberikan oleh bank 1 adalah sebesar 8 % yang dimajemukkan per tahun sedangkan bonus yang diberikan adalah sebesar 1,8; 1,7; 2,1; dan 2,5 % untuk tahun 1 s/d tahun 5. Tingkat suku bunga yang ditawarkan oleh bank 2 lebih rendah 0,2% dibandingkan bank 1 sedangkan bonus yang diberikan lebih tinggi sebesar 0,5%. Tujuan Saudara adalah memaksimalkan besarnya modal pada akhir tahun 4.

Menggunakan notasi yang diberikan diperoleh :

P_1 = \$ 4.000, $P_2 = P_3 = P_4$ = \$ 2.000

$\alpha_1 = (1 + 0{,}8) = 1{,}08$

$\alpha_2 = (1 + 0{,}078) = 1{,}078$

$q_{11} = 0{,}018$ $q_{21} = 0{,}017 q_{31} = 0{,}021$ $q_{41} = 0{,}025$

$q_{12} = 0{,}023$ $q_{22} = 0{,}022 q_{32} = 0{,}026$ $q_{42} = 0{,}030$

Tahap 4

$$f_4(x_4) = \underset{0 \le I_4 \le x_4}{\text{maks.}} \{s_4\}$$

dengan

$$s_4 = (\alpha_1 + q_{41} + \alpha_2 + q_{42})I_4 + (\alpha_2 + q_{42})x_4 = -0{,}003I_4 + 1{,}108x_4$$

Fungsi s_4 dalam I_4 dalam kisaran $0 \le I_4 \le x_4$ di mana nilai maksimumnya terjadi pada I_4 = 0 karena koefisien I_4 adalah negatif. Jadi penyelesaian optimal untuk tahap 4 dapat diringkat seperti tabel berikut:

	Penyelesaian optimal	
Keadaan	$f_4(x_4)$	I_4^*
x_4	$1{,}08x_4$	0

Tahap 3

$$f_3(x_3) = \underset{0 \le I_3 \le x_3}{\text{maks.}} \{s_3 + f_4(x_4)\}$$

dengan

$$s_3 = (1{,}08^2 - 1{,}078^2)I_3 + 1{,}078^2 x_3 = 0{,}00432I_2 + 1{,}1621x_3$$

$$x_4 = 2000 - 0{,}005I_3 + 0{,}026x_3$$

Jadi :

$$f_3(x_3) = \underset{0 \le I_3 \le x_3}{\text{maks.}} \{0{,}00432I3 + 1{,}1621x_3 + 1{,}108(2000 - 0{,}005I_3 + x_3)\}$$

$$= \underset{0 \le I_3 \le x_3}{\text{maks.}} \{ 2216 - 0{,}00122I_3 + 1{,}1909x_3\}$$

	Penyelesaian optimal	
Keadaan	$f_3(x_3)$	I_3^*
x_3	$2216 + 1,1909x_3$	0

Tahap 2

$$f_2(x_2) = \text{maks. } \{s_2 + f_3(x_3)\}$$
$$0 \leq I_2 \leq x_2$$

dengan

$$s_2 = (1,08^3 - 1,078^3)I_3 + 1,078^3x_3 = 0,006985I_2 + 1,2527x_2$$
$$x_3 = 2000 - 0,005I_2 + 0,022x_2$$

Jadi :

$$f_2(x_2) = \text{maks. } \{0,006985I_2+1,2527x_2+2216+1,1909(2000-0,005I_2+0,022x_2)\} \quad 0 \leq I_2 \leq x_2$$
$$= \text{maks. } \{ 4597,8 - 0,001305I_2 + 1,27893x_2\}$$
$$0 \leq I_2 \leq x_2$$

	Penyelesaian optimal	
Keadaan	$f_3(x_3)$	I_2^*
x_2	$4597,8+ 1,27996x_2$	x_2

Tahap 1

$$f_1(x_1) = \text{maks. } \{s_1 + f_1(x_1)\}$$
$$0 \leq I_1 \leq x_1$$

dengan

$$s_1 = (1,08^4 - 1,078^4)I_1 + 1,078^4x_1 = 0,01005I_1 + 1,3504x_1$$
$$x_2 = 2000 - 0,005I_1 + 0,023x_1$$

Jadi :

$$f_1(x_1) = \text{maks. } \{0,01005I_1+1,3504x_1+4597,8+1,27996(2000-,005I_1+0,023x_2)\}$$
$$0 \leq I_2 \leq x_2$$
$$= \text{maks. } \{ 7157,7 - 0,00365I_1 + 13798x_1\}$$
$$0 \leq I_1 \leq x_1$$

	Penyelesaian optimal	
Keadaan	$f_1(x_1)$	I_1^*
x_1 = 4000	$7157,7+ 1,38349x_2$	4000

Dengan melakukan perhitungan mundur diperoleh :

X_2 = 2000 – 0,005 x 4000 + 0,023 x 4000 = \$ 2072
X_3 = 2000 – 0,005 x 2072 + 0,022 x 2072 = \$ 2035,22
X_4 = 2000 – 0,005 x 0 + 0,026 x 2035,22 = \$ 2052,92

Penyelesaian optimalnya dapat diringkas sbb. :

Penyelesaian optimal	*Keputusan*

$I_1^* = x_1$ $I_2^* = x_2$ $I_3^* = 0$ $I_4^* = 0$	Investasi x_1 = \$ 4000 pada bank 1 Investasi x_2 = \$ 2072 pada bank 1 Investasi x_3 = \$ 2035,22 pada bank 2 Investasi x_4 = \$ 2052,92 pada bank 2

Persoalan dimensionalitas

Pada semua peersoalan model Programa Dinamis yang telah disampaikan, keadaan pada setiap tahap diwakili oleh sebuah variabel. Sebagai contoh, pada persoalan pemuatan barang, persoalan menyebutkan hanya berat setiap barang yang merupakan batasan dari muatan. Lebih realistic jika volume dari kapal juga merupakan batasan dari persoalan. Dalam hal demikian keadaan pada setiap tahap mempunyai dua dimensi karena mengandung dua variabel yaitu berat dan volume.

Peningkatan jumlah variabel keadaan meningkatkan perhitungan pada setiap tahap. Kondisi seperti ini untuk model Programa Dinamis dengan tabulasi perhitungan di mana jumlah baris pada setiap tabel harus berkaitan dengan semua kombinasi dari variabel keadaan. Kesulitan perhitungan sedemikian menarik perhatian dalam Programa Dinamis dalam literatur disebut sebagai curse of dimensionality.

Contoh berikut dipilih untuk mendemonstrasikan curse dimensionality. Hal ini juga memperlihatkan bagaimana Programa Linier dapat diselesaikan dengan Programa dinamis.

Contoh :

Sebuah perusahaan menghasilkan dua macam barang. Waktu yang tersedia pada proses manufaktur adalah 430 menit. Barang 1 memerlukan waktu 2 menit per unit dan barang 2 memerlukan waktu 1 menit per unit. Tidak terdapat pembatasan jumlah barang 1 yang dapat diproduksi akan tetapi untuk barang 2 terbatas sampai 230 unit. Keuntungan barang 1 adalah \$ 2 per unit dan barang 2 \$ 5 per unit. Carilah penyelesaian optimalnya dengan menggunakan Programa dinamis.

Model Programa Linier dari persoalan di atas adalah :

Maks. $z = 2x_1 + 5x_2$

d. k. $2x_1 + x_2 \leq 430$

$x_2 \leq 230$

$x_1, x_2 \geq 0$

Komponen dari Model Programa dinamis dari persolan di atas adalah :

1. tahap i Berkaitan dengan barang i, i = 1, 2
2. Alternatif x_i adalah jumlah barang i, i = 1, 2
3. Keadaan (v_2, w_2) mewakili jumlah sumber 1 dan 2 (waktu produksi dan batas permintaan) yang digunakan pada tahap 2
4. Keadaan (v_1, w_1) mewakili jumlah sumber 1 dan 2 (waktu produksi dan batas permintaan) yang digunakan pada tahap 1 dan 2

Tahap 2

Definisikan $f_2(v_2,w_2)$ sebagai keuntungan maksimum pada tahap 2 (barang 2), pada keadaan (v_2, w_2) maka :

$$f_2(v_2,w_2) = \text{maks. } \{5x_2\}$$
$$0 \leq x_2 \leq v_2$$
$$0 \leq x_2 \leq w_2$$

Jadi maks $\{5x_2\}$ terjadi pada $x_2 = \min\{v_2,w_2\}$, dan penyelesaian untuk tahap 2 adalah :

	Penyelesaian optimal	
Keadaan	$f_2(v_2,w_2)$	x_2
(v_2,w_2)	$5 \min\{v_2,w_2\}$	$\text{Min}\{v_2,w_2\}$

Tahap 1

$$f_1(v_1,w_1) = \text{maks. } \{2x_1 + f_2(v_1 - 2x_1, w_1\}$$
$$0 \leq 2x_1 \leq v_1$$
$$= \text{maks. } \{2x1 + 5 \min(v_1 - 2x_1, w_1\}$$
$$0 \leq 2x_1 \leq v_1$$

Optimasi pada tahap 1 memerlukan penyelesaian persoalan minimaks, yang pada umumnya sulit. Untuk persoalan saat ini kita tetapkan v_1 = 430 dan w_1 = 230, yang memberikan $0 \leq 2x_1 \leq 430$. Karena min. (430-2x_1, 230) adalah batas lebih bawah dari perpotongan dua garis (jelaskan !) hal ini diikuti oleh :

$$\text{Min. } (430 - 2x_1, 230) = \begin{cases} 230 & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ 430 - 2x_1, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

dan

$f_1(430, 230) = \text{maks}\ \{2x_1 + 5\text{min.}\ (430 - 2x_1, 230)\}$

$0 \leq x_1 \leq 215$

$$= \underset{x_1}{\text{maks.}} \begin{cases} 2x_1 + 1150 & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ -8x_1 + 2150, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

Saudara dapat menjelaskan secara grafis bahwa nilai optimal dari f_1 (430,230) terjadi pada $x_1 = 100$. Jadi diperoleh :

	Penyelesaian optimal	
Keadaan	$f_1(v_1,w_1)$	x_1
(430,230)	1350	100

Untuk menentukan nilai optimal x_2 dari perhitungan :

$v_2 = v_1 - 2x_1 = 430 - 200 = 230$

$w_2 = w_1 - 0 = 230$

Sebagai akibatnya :

$x_2 = \text{min.}\ (v_2, w_2) = 230$

dapat disimpulkan penyelesaian optimal adalah :

$x_1 = 100$ unit, $x_2 = 230$ unit, $z = \$\ 1350$