ANALISIS MARKOV

Analisis Markov adalah suatu teknik matematik untuk peramalan perubahan pada variabel-variabel tertentu berdasarkan pengetahuan dari perubahan sebelumnya. Pada analisis ini terlihat suatu sistem setelah percobaan berulang, dimana hasil dari sistem pada periode yang akan datang tidak dapat ditentukan sebelumnya dengan pasti. Suatu set kemungkinan perubahan keadaan (transisi) diperhitungkan untuk menjelaskan bagaimana sistem tersebut melakukan transisi (perubahan) dari satu periode ke periode lainnya.

Analisis Markov digunakan untuk menganalisis masalah pada bidang pemasaran (misalnya perubahan merek), persediaan, pemeliharaan dan penggantian mesin, analisis bursa efek dan administrasi rumah sakit.

Proses Markov

Proses Markov adalah suatu kasus khusus dari proses stokastik yang lebih umum. Proses stokastik dapat dilihat sebagai deretan variabel acak terhadap waktu. Misalnya pada indeks bursa efek Dow Jones. Setiap hari nilai akhir dari angka indeks tersebut diterima sebagai hasil dari variabel acak. Pada suatu periode waktu, kita dapat menganggap angka indeks dari Dow Jones merupakan realisasi dari proses stokastik. Secara spesifik, misalkan x_i adalah angka indeks pada akhir hari ke i dalam tahun tertentu, dengan i = 1 sampai 250 (diasumsikan dalam satu tahun terdapat 250 hari perdagangan). Misalnya x_{37} merupakan variabel acak yang menggambar- kan hasil dari hari ke 37 pada tahun tertentu. Maka x_i dimana i = 1 sampai 250 merupakan proses yang stokastik. Nilai yang diobservasi pada proses stokastik ini untuk satu tahun adalah realisasi dari proses tersebut. Nilai x_i pada suatu hari disebut status/keadaan dari proses.

Ciri khas dari proses Markov melihat kemungkinan tersebut sebagai perubahan dari suatu keadaan ke keadaan yang lain. Dalam proses Markov, kemungkinan berubah dari suatu keadaan ke keadaan yang lain hanya tergantung pada keadaan saat ini dan bukan bagaimana sampai pada keadaan tersebut. Hal ini dikenal sebagai sifat Markov. Dan dikatakan proses tersebut tidak mempunyai memori.

Matriks kemungkinan perpindahan keadaan / transisi

Kemungkinan perubahan dari satu keadaan ke keadaan yang lain dalam prose Markov disebut kemungkinan transisi, ditampilkan dengan matriks kemungkinan transisi seperti pada tabel 1.

Tabel 1 : Matriks kemungkinan transisi

Dari keadaan Ke :	Pindah ke keadaan ke :							
	1	2	.	.	j	.	.	n
1	p_{11}	p_{12}	.	.	p_{1j}	.	.	p_{1n}
2	p_{21}	p_{22}	.	.	p_{2j}	.	.	p_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.
i	p_{i1}	p_{i2}	.	.	p_{ij}	.	.	p_{in}
.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	p_{n1}	p_{n2}	.	.	p_{nj}	.	.	p_{nn}

n adalah jumlah keadaan dalam proses dan p_{ij} adalah kemungkinan transisi dari keadaan saat i ke keadaan j. Jika saat ini berada pada keadaan i maka baris i dari tabel di atas berisi angka-angka p_{i1}, p_{i2}, ……., p_{in} merupakan kemungkinan berubah ke keadaan berikutnya. Oleh karena angka tersebut melambangkan kemungkinan, maka semuanya melupakan bilangan non negatif dan tidak lebih dari satu. Secara matematis :

$0 \leq p_{ij} \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots.., n$

$\Sigma\, p_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots.., n$

Contoh 1 :

Pada suatu kota kecil terdapat dua pasar swalayan W dan L. Diasumsikan setiap pembeli di kota tersebut melakukan kunjungan belanja satu kali per minggu. Dalam sembarang minggu seorang pembeli hanya berbelanja di W atau di L saja, dan tidak di keduanya. Kunjungan belanja disebut percobaan (trial) dari proses dan toko yang dipilih disebut keadaan dari proses. Suatu sampel 100 pembeli diambil dalam periode 10 minggu, kemudian data dikompilasikan.

Dalam menganalisis data, terlihat bahwa dari seluruh pembeli yang berbelanja di W dalam suatu minggu, 90 persen tetap berbelanja di toko W pada minggu berikutnya, sedangkan sisanya berpindah belanja pada toko L. 80 persen dari yang berbelanja di toko L dalam suatu minggu tetap berbelanja di toko L sedangkan 20 persen berpindah belanja pada toko W. Informasi tersebut disusun pada tabel 2 berikut :

Tabel 2 : Matriks kemungkinan transisi

Pilihan pelanggan pada suatu minggu	Pilihan pada minggu berikutnya	
	W	L
W	90	10
L	20	80

Pada kedua baris berjumlah 100, tetapi jumlah kolom tidak. Informasi ini digunakan untuk membuat matriks kemungkinan perpindahan keadaan / transisi.

Didefinisikan :

Keadaan 1 : Pembeli berbelanja di W

Keadaan 2 : Pembeli berbelanja di L

Dengan demikian matriks kemungkinan transisi adalah P :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90/100 & 10/100 \\ 20/100 & 80/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa kemungkinan dari setiap baris berjumlah satu.

Contoh 2 :

Pada suatu negara terdapat dua partai politik, L dan C. Pemilihan umum berlangsung setiap tiga tahun. Partai yang memenangkan pemilu membentuk pemerintahan. Catatan dari pemilu selama 35 tahun terakhir tertera pada tabel 3.

Tabel 3 : Daftar pemenang pemilu

Tahun ke :	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
Pemenang pemilu :	C	C	L	C	L	L	C	L	L	C	L	L

Penyelesaian :

Ditentukan keadaan 1 adalah L pemenang pemilu sedangkan keadaan 2 adalah C adalah pemenang pemilu. Hasil 12 pemilu tersebut ditabulasikan kemungkinan transisinya seperti terlihat pada tabel 4 :

Tabel 4 : Matriks kemungkinan transisi

Pilihan pada Suatu periode	Pilihan pada periode berikutnya		
	Keadaan 1	Keadaan 2	Total baris
C	1	4	5
L	3	3	6

Dengan demikian kemungkinan transisinya P adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Contoh 3

Angka indeks industri Dow Jones diklasifikasikan ke dalam tiga keadaan sbb. :

Keadaan 1 : Penurunan angka indeks dari angka indeks hari terakhir sebelumnya

Keadaan 2 : Tidak ada perubahan angka indeks

Keadaan 3 : Peningkatan angka indeks dari angka indeks hari sebelumnya

Tabel 5 menggambarkan jumlah hari perdagangan perpindahan keadaan angka indeks yang tercatat selama tahun-tahun terakhir.

Tabel 5 : Perubahan angka indeks Dow Jones

Perubahan indeks pada suatu hari :	Perubahan indeks hari berikutnya			
	Turun	Tetap	naik	Jumlah baris
Turun	65	40	95	200
Tetap	80	50	20	150
Naik	50	70	60	180

Dari tabel di atas terlihat jumlah hari dimana angka indeks yang pada suatu hari turun, pada hari berikutnya turun adalah turun kembali sebanyak 65 kali, sebanyak 40 kali tetap, dan sebanyak 95 kali meningkat. Total pada suatu hari turun adalah sebanyak 200 kali.

Matriks kemungkinan transisinya setelah dihitung adalah sebesar P sebagai berikut :

$$P = \begin{pmatrix} 65/200 & 40/200 & 95/200 \\ 80/150 & 50/150 & 20/150 \\ 50/180 & 70/180 & 60/180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.325 & 0.200 & 0.475 \\ 0.534 & 0.333 & 0.133 \\ 0.278 & 0.389 & 0.333 \end{pmatrix}$$

Mencari Kemungkinan keadaan tunak / steady state

Sejauh ini baru dibahas cara membuat matriks kemungkinan perpindahan keadaan/transisi untuk beberapa contoh. Pada bagian ini akan diberikan teknik komputasi untuk berbagai keadaan yang berbeda. Kemungkinan tersebut disebut kemungkinan keadaan tunak/steady state kebalikan dari kemungkinan transisi. Pertama-tama dibahas kemungkinan transisi untuk lebih dari satu periode.

Pemecahan Transient

Contoh 4

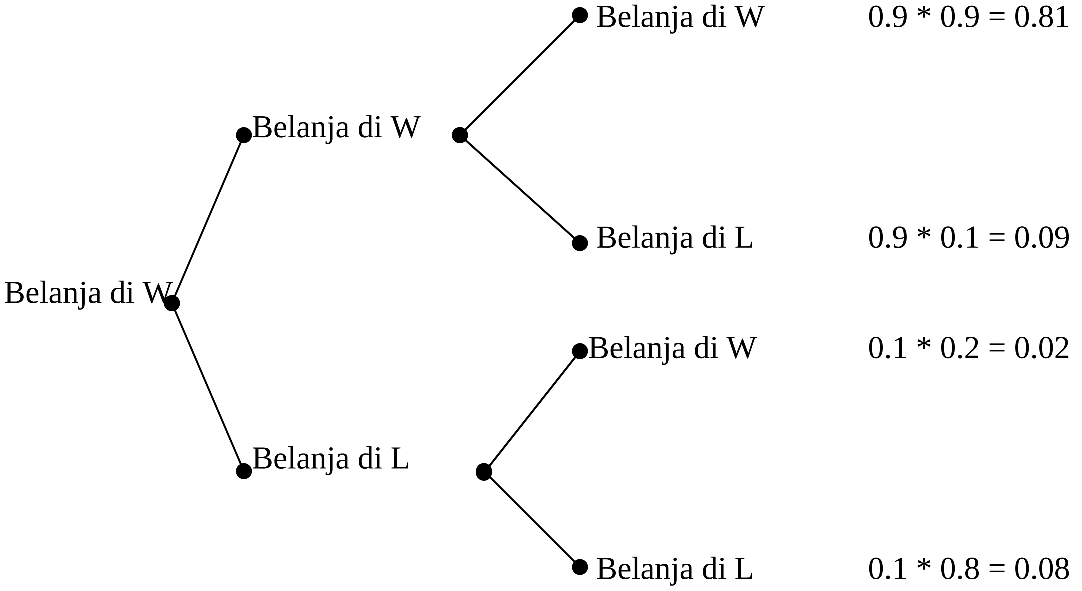
Dari contoh 1 tentang pola berbelanja, hitung perubahan pada kemungkinan untuk berbagai keadaan dalam waktu berikutnya.

Penyelesaian :

Pertama-tama kita lihat pembeli yang minggu ini berbelanja di W. Kondisi ini digambarkan pada diagram pohon berikut yang menunjukkan keadaan saat ini dan kemungkinannya pada dua minggu yang akan datang.

Kemungkinan pada

Minggu ini   Minggu y. a. d.   dua minggu y.a.d.   dua minggu y.a.d.



Dari diagram di atas terlihat bahwa kemungkinan pembeli di W minggu ini akan berbelanja di W kembali untuk 2 minggu yang akan datang adalah 0.81+0.02=0.83. dengan cara yang sama kemungkinan yang berbelanja di L untuk 2 minggu yang akan datang adalah 0.09+0.08= 0.17. Metode cara menghitung di atas adalah terlalu kompleks untuk digunakan untuk periode waktu yang akan datang yang besar. Prosedur yang lebih mudah melibatkan penggunakan aljabar matriks.

$$\underbrace{(\,0.9 \quad 0.1\,)}_{\substack{\text{Kemungkinan transisi}\\ \text{Untuk minggu ini}}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriks kemungkinan}\\ \text{transisi}}} = [(0.9*0.9 + 0.1*0.2)\ \ (0.9*0.1 + 0.2*0.8)]$$

$$= [\ 0.83 \quad 0.17\ ]$$

Dengan cara yang sama dapat dilihat kemungkinan untuk tiga minggu yang akan datang :

$$=[\ 0.83 \quad 0.17\ ] \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = [\ 0.781 \quad 0.219\ ]$$

Untuk minggu kesepuluh, kita mengulang prosedur ini untuk setiap minggu sampai minggu kesepuluh. Proses ini tentunya rumit. Oleh karena itu digunakan metode yang lebih mudah, menggunakan sifat jangka panjang dari rantai Markov.

Pemecahan Keadaan tunak / steady state

Dari pola berbelanja pada contoh 1, dapat ditunjukkan bahwa setelah beberapa minggu kemungkinan berada dalam keadaan lain (berubah) akan surut menjadi kemungkinan keadaan yang steady state. Keadaan demikian dilambangkan dengan $\pi 1$ adalah kemungkinan berada dalam keadaan 1 dan $\pi 2$ adalah kemungkinan berada dalam keadaan 2. Setelah keadaan steady state, maka pada periode berikutnya tidak berubah. Hal tersebut memenuhi hubungan berikut :

$$(\pi 1 \quad \pi 2) = (\pi 1 \quad \pi 2) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Setelah dilakukan perkalian matriks diperoleh :

$$\pi 1 = 0.9\pi 1 + 0.2\pi 2 \qquad (1)$$

$$\pi 2 = 0.1\pi 1 + 0.8\pi 2 \qquad (2)$$

Di samping hubungan di atas tentu saja $\pi 1 + \pi 2 = 1$ karena jumlah kemungkinan adalah 1. → diperoleh $\pi 2 = 1 - \pi 1$

Dengan mensubstitusikan $\pi 2 = 1 - \pi 1$ ke dalam persamaan 1 diperoleh :

$$\pi 1 = 0.9\pi 1 + 0.2\,(1 - \pi 1) \rightarrow \quad \pi 1 = 2/3$$

$$\pi 2 = 1/3$$

Dengan demikian $(\pi 1 \quad \pi 2) = (2/3 \quad 1/3)$

Secara umum untuk suatu rantai Markov dengan dua keadaan matriks kemungkinan perpindahan keadaan (transisi)nya adalah :

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

maka kemungkinan pada keadaan steady state memenuhi hubungan :

$$(\pi 1 \quad \pi 2) = (\pi 1 \quad \pi 2) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

diperoleh :

$$\pi 1 = \frac{p_{21}}{1 - p_{11} + p_{21}} \qquad \pi 2 = \frac{p_{12}}{1 - p_{12} + p_{22}}$$

Contoh 5 :

PT. X mempunyai peralatan bulldozer yang keadaannya diinspeksi setiap akhir minggu. Keadaan tersebut diklasifikasikan dalam keadaan baik, perlu penyetelan dan rusak. Keadaan peralatan setiap minggu tergantung pada keadaan peralatan pada minggu sebelumnya. Matriks kemungkinan transisi(perpindahan keadaan) dari peralatan tersebut adalah :

Keadaan Minggu ini	Keadaan minggu berikutnya		
	Baik	Stel	Rusak
Baik	0.4	0.5	0.1
Stel	0.2	0.5	0.3
Rusak	0	0.6	0.4

a. Untuk setiap keadaan pada setiap akhir minggu, berikan kondisi alat pada akhir dua minggu yang akan datang
b. Tentukan kemungkinan steady statenya

Penyelesaian :

a. Seperti pada contoh sebelumnya keadaan pada dua minggu yang akan datang dapat dihitung sbb.

Keadaan akhir minggu ini baik, maka keadaan dua minggu yang akan datang :

$$[\ 0.4 \quad 0.5 \quad 0.1\ ] \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = [\ 0.26 \quad 0.51 \quad 0.23\ ]$$

Keadaan akhir minggu ini perlu penyetelan, maka keadaan dua minggu yang akan datang :

$$[\ 0.2 \quad 0.5 \quad 0.3\ ] \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = [\ 0.18 \quad 0.53 \quad 0.29\ ]$$

Keadaan akhir minggu ini rusak, maka keadaan dua minggu yang akan datang :

$$[\ 0 \quad 0.6 \quad 0.4\ ] \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = [\ 0.12 \quad 0.54 \quad 0.34\ ]$$

b. Dengan cara serupa kemungkinan keadaan steady state diperoleh dari hubungan berikut :

$$[\pi 1 \quad \pi 2 \quad \pi 3] = [\pi 1 \quad \pi 2 \quad \pi 3]\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Setelah diselesaikan diperoleh :

$\pi 1 = 3/17 = 0.177$

$\pi 2 = 9/17 = 0.529$

$\pi 3 = 5/17 = 0.294$

Catatan :

Dengan P merupakan matriks kemungkinan transisi biasa (one step) maka P x P (atau P^2) akan memberikan kemungkinan transisi two step. Dalam contoh di atas diperoleh :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.51 & 0.23 \\ 0.18 & 0.53 & 0.29 \\ 0.12 & 0.54 & 0.34 \end{pmatrix}$$

Pengambilan keputusan dengan Proses Markov

Setelah menghitung kemungkinan steady state untuk berbagai kasus alami, dengan diketahuinya suatu masalah, kita dapat memperluas analisis sampai dengan membuat keputusan menggunakan analisis rantai Markov. Misalnya pada contoh 1 tentang pilihan pembelanja, apabila supermarket L mengadakan kampanye promosi untuk meningkatkan pangsa pasarnya, kemungkinan transisi akan berubah, menghasilkan kelompok baru dalam pembagian pangsa pasar. Keuntungan yang dihasilkan L yang lebih besar harus dikompromikan terhadap biaya pengeluaran untuk kampanye promosi. Untuk memahami hal tersebut kita bicarakan dengan contoh.

Contoh 6 :

Pada contoh 1 diasumsikan bahwa L percaya bahwa suatu kampanye akan meningkatkan kemungkinan pembeli W beralih pada L dari 0.1 menjadi 0.3 sedangkan yang tetap berbelanja di L meningkat dari 0.8 menjadi 0.9. Jumlah keseluruhan pasar diperkirakan 10.000 pembeli per minggu dan keuntungan yang diperoleh oleh toko L adalah sebesar $ 2 per pelanggan. Haruskah L melakukan kampanye promosi.

Matriks kemungkinan transisi setelah melakukan promosi adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Setelah dihitung diperoleh kemungkinan pada keadaan steady state :

$\pi 1 = 1/4$

$\pi 1 = 3/4$

Pangsa pasar L meningkat menjadi 75 % dimana sebelumnya adalah sebesar $33^1/_3$ %. Karena keseluruhan pasar berjumlah 10.000 pembeli per minggu, maka jumlah pembeli toko L meningkat sebesar = 7500 – 3333 = 4167 pembeli per minggu. Apabila keuntungan rata-rata dari setiap pembeli sebesar $ 2 per minggu maka keuntungan akan meningkat sebesar $8334. Selama biaya kampanye promosi lebih kecil dari jumlah tersebut, maka L sebaiknya memikirkan tentang kampanye tersebut. Situasi keseluruhan akan berubah apabila W juga mengadakan kampanye yang mengimbangi keunggulan L secara keseluruhan atau sebagian.

Ringkasan

Pada bab ini telah dibahas tentang model Proses Markov serta aplikasinya terhadapa masalah pengambilan keputusan. Dalam model yang dibahas, terlebih dahulu dipikirkan bagaimana membuat matriks kemungkinan transisi (perpindahan keadaan) dari data mentah aktual. Lalu diperlihatkan bagaimana mengkomputasikan kemungkinan transien dan steady state. Sejumlah scenario digunakan dalam mengembangkan model. Akhirnya disajikan suatu analisa ekonomis yang berhubungan dengan peralihan merek.

Analisa kita mengasumsikan sistem bersifat steady state. Meskipun sedikit sistem nyata dapat dianggap steady state, penelitian sifat keseluruhan juga merupakan perhatian yang besar bagi pengambilan keputusan.