PROGRAMA INTEGER

Model Programa Linier :

$$\text{Maks. } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_nx_n$$

$$\text{d. k.} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1;\ x_2;\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_n \geq 0$$

Semua variabel keputusan dari model di atas akan mempunyai nilai riel yang non negatif, seperti bilangan pecahan, bilangan desimal. Kadang-kadang variabel keputusan harus mengambil nilai bilangan bulat. Misalnya jumlah pekerja, mesin dls. Jika kita membulatkan nilai optimal yang diperoleh, penyelesaiannya belum tentu memberikan hasil yang optimal.

Contoh 1 :

Sebuah perusahaan akan membeli beberapa buah mesin dari dua macam mesin yang berbeda. Harga mesin pertama adalah $ 1.000.000 dan mesin kedua $ 4.000.000 per unit. Keuntungan mesin pertama adalah $ 30.000 dan mesin kedua adalah $ 130.000 per unit per bulan. Dana yang tersedia untuk membeli mesin adalah $ 11.000.000. Berapa buah mesin yang akan dibeli setiap jenisnya. Tujuan perusahaan tersebut adalah memaksimalkan keuntungan setiap bulan.

Model Programa Liniernya adalah :

Maks. Z = 30X1 + 130X2

d. k. X1 + 4X2 $\leq$ 11

X1; X2 $\geq$ 0 dan integer

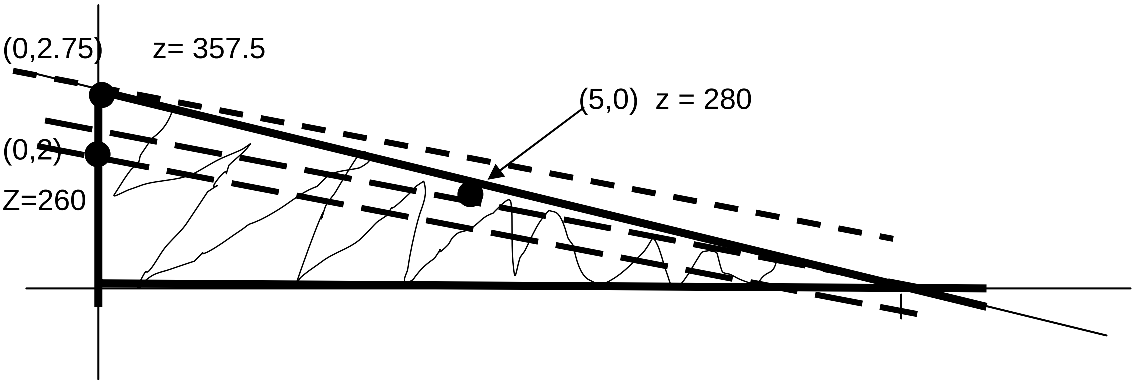
Penyelesaian :

Jika kendala integer diabaikan, diperoleh hasil sebagai berikut :

X1 = 0

X2 = 2,75

Z = 357,5



Oleh karena variabel keputusan harus merupakan bilangan bulat, kita tetapkan X1 = 0 dan X2 = 2 (X2 = 3 adalah tidak layak), maka diperoleh Z = 260. Akan tetapi jika diteliti lebih lanjut pada X1 = 5 dan X2 = 1 diperoleh Z = 280. Dengan demikian terlihat bahwa pembulatan hasil variabel keputusan dapat diperoleh nilai Z yang tidak optimal. Untuk itu perlu dicari cara penyelesaian yang memberikan hasil yang optimal.

JENIS-JENIS MODEL PROGRAMA INTEGER :

1. Programa Integer Murni
2. Programa Integer 0 – 1
3. Programa Integer Campuran

FORMULASI PERSOALAN PROGRAMA INTEGER :

Contoh 2 (Programa Integer murni) :

PT. X membangun kapal layar *fiber glass* dengan ukuran panjang 30 ‘ dan 20’. Keuntungan dari penjualan kapal tersebut adalah $ 6.000 dan $ 1.000 per unit. Setiap jenis kapal memerlukan waktu pembangunan masing-masing selama 1 minggu. Sumber yang terbatas adalah luas lantai dan tenaga kerja. Kapal ukuran 30’ memerlukan luas lantai dua unit dan 4 unit tenaga kerja, sedangkan kapal ukuran 20’ memerlukan 1 unit luas lantai dan 1 unit tenaga kerja. Luas lantai yang tersedia adalah 4 unit Dan tenaga kerja yang tersedia adalah 6 unit setiap minggu. Berapa unit kapal yang dibangun per minggu ? Buatlah model matematis dari persoalan di atas.

Penyelesaian :

Variabel keputusan :

X1 = jumlah kapal ukuran 30’ yang dibangun

X2 = jumlah kapal ukuran 20’ yang dibangun

Fungsi tujuan :

Maks. Z = 6X1 + X2

Kendala :

$4X1 + X2 \leq 6$ (kebutuhan tenaga kerja)

$2X1 + X2 \leq 4$ (luas lantai)

$X1; X2 \geq 0$ dan integer

Contoh 3 (Persoalan Programa Integer 0 – 1) :

Perusahaan X adalah sebuah perusahaan pengelola dana pensiun sedang mempertimbangkan lima buah usulan investasi tiga tahun. Perusahaan tersebut mengalokasikan dana sebesar $ 50 juta, $ 40 juta dan $ 30 juta untuk tahun I, II, dan III. Proyek tersebut harus selesai dalam tiga tahun dan menghasilkan untung. Aliran dana dari invesatasi diperlihatkan pada tabel berikut :

Proposal	Kebutuhan modal ($ juta)			Net Present Value
investasi	Tahun I	Tahun II	Tahun III	(NPV - $ juta)
A	10	8	6	15
B	14	11	8	18
C	16	12	9	9
D	8	9	7	8
E	9	7	5	8

Buatlah model matematis dari persoalan di atas.

Penyelesaian :

$$\text{Variabel : } X_j = \begin{cases} 1 \text{ jika proposal j dipilih} \\ 0 \text{ jika proposal j tidak dipilh} \end{cases}$$

Model menjadi :

$$\text{Maks. } Z = 15X1 + 18X2 + 9X3 + 8X4 + 8X5$$

$$\begin{aligned} \text{d. k.} \quad & 10X1 + 14X2 + 16X3 + 8X4 + 9X5 \le 50 \\ & 8X1 + 11X2 + 12X3 + 9X4 + 7X5 \le 40 \\ & 6X1 + 8X2 + 9X3 + 7X4 + 5X5 \le 30 \\ & X_J = 0 \text{ atau } 1 \qquad j = 1; 2; \ldots\ldots; 5 \end{aligned}$$

Model di atas disebut ‘knapsack model’. Nama tersebut berasal dari konsep seorang ‘hiker’ yang berharap membawa barangnya dalam ransel sebanyak mungkin. Setiap barang mempunyai berat, volume dan niali yang berbeda. Dia ingin memaksimalkan nilai barang bawaannya tanpa melanggar berat dan isi ranselnya.

Contoh 4 (Persoalan Programa Integer Campuran) :

Sebuah pabrik cat menghadapi persoalan jadual pengiriman barang dari gudang ke toko dengan jumlah persediaan di gudang, jumlah permintaan toko seperti terlihat pada tabel 1 dan 2. Untuk mengangkut cat, perusahaan menyewa truk. Tedapat dua komponen biaya pengiriman, yaitu biaya tetap (tabel 3) untuk pengiriman dari gudang ke toko yang tidak tergantung dari ukuran barang yang diangkut dan biaya variabel sebesar $ 5 untuk setiap 100 l (drum) (tanpa memper-hatian dari gudang ke toko mana cat tersebut diangkut). Buatlah model Programa Integer dari persoalan di atas.

Tabel 1

Gudang	Tersedia
A	6000 l
B	7000 l
C	8000 l
D	9000 l

Tabel 2

Toko	Permintaan
1	8000 l
2	8000 l
3	12000 l

Tabel 3 biaya tetap ($)

Dari	Ke toko		
Gudang	1	2	3
A	3800	2750	3400
B	2900	3100	2850
C	3650	4020	3840
D	4075	1920	3040

Penyelesaian :

Variabel : x_{ij} = jumlah cat (jumlah drum ukuran 100 l) yang diangkut dari gudang I ke toko j

y_{ij} = 1 jika $X_{ij} > 0$ (terdapat cat yang diangkut)

= 0 jika $X_{ij} = 0$ (tidak ada cat yang diangkut)

Bentuk bersyarat di atas bukanlah bentuk yang linier → perlu dijadikan linier

Bentuk di atas dapat diganti dengan bentuk :

$x_{ij} - My_{ij} \leq 0$ dengan M = bilangan positif yang besar sekali

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Bukti : $x_{ij} - My_{ij}$

Jika x_{ij} positif → $y_{ij} = 1$ pos. – pos. besar = negatif → memenuhi

→ $y_{ij} = 0$ pos. – nol = positif → tidak memenuhi

$x_{ij} - My_{ij} \leq 0$

Jika $y_{ij} = 0$ → x_{ij} - nol ≤ 0 → $x_{ij} \leq 0$ → $x_{ij} = 0$ terbukti!

Sebelumnya telah ditentukan $x_{ij} \geq 0$

Dengan demikian model adalah :

Fungsi tujuan :

Min. Z = $(3800y_{11} + 5x_{11}) + (2750y_{12} + 5x_{12}) + (3400y_{13} + 5x_{13}) + (2900y_{21} + 5x_{21}) +$
$(3100y_{22} + 5x_{22}) + (2850y_{23} + 5x_{23}) + (3650y_{31} + 5x_{31}) + (4020y_{32} + 5x_{32}) +$
$(3840y_{33} + 5x_{33}) + (4075y_{41} + 5x_{41}) + (1920y_{42} + 5x_{42}) + (3040y_{43} + 5x_{43})$

Dengan kendala :

Kendala sumber : $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 60$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 90$

Kendala tujuan : $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 90$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 120$

$x_{ij} - My_{ij} \leq 0$ i = 1; 2; 3; 4 j = 1; 2; 3

$x_{ij} \geq 0$ i = 1; 2; 3; 4 j = 1; 2; 3

Pada persoalan ini M dapat ditentukan = 120 (mengapa ?)

Model di atas bentuknya sama dengan persoalan transportasi dalam bentuk standar, kecuali kendala biaya tetap yaitu $x_{ij} - My_{ij} \leq 0$.

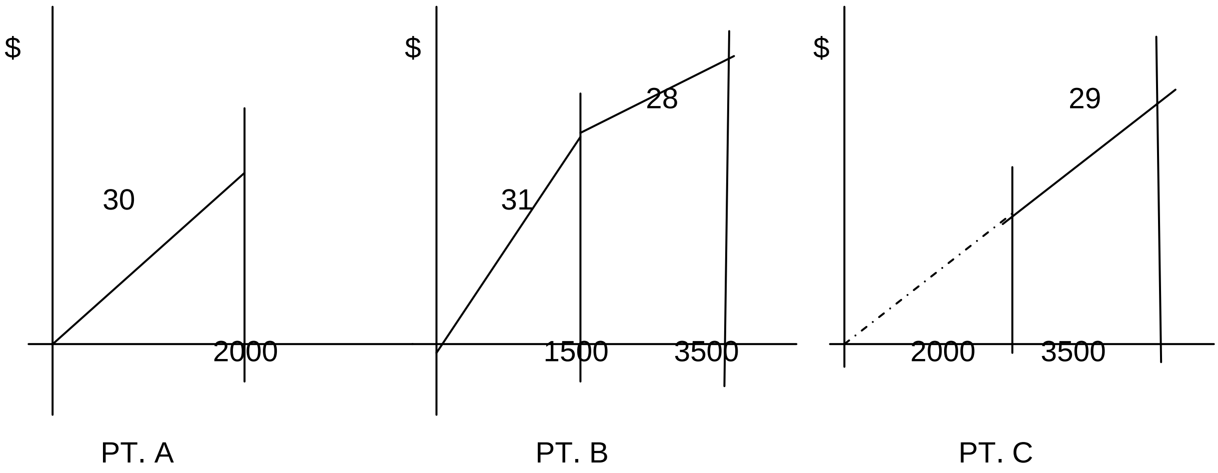
Bentuk ini disebut dengan persoalan biaya tetap (fixed charge problem), karena biaya tetap tersebut berkaitan dengan variabel x_{ij}. Variabel y_{ij} adalah untuk menyatakan apakah biaya tersebut dikenakan atau tidak.

Contoh 5 :

Sebuah perusahaan memerlukan komponen X sebanyak 5000 unit untuk membuat barang Y. komponen X tersebut adalah suatu produk yang telah distandarisasi. Semua perusahaan yang dapat memenuhi standar yang diberikan dapat mensupali komponen tersebut. PT. A menawarkan komponen tersebut dengan harga $ 30 per unit. PT. A saat ini mempunyai komponen X sebanyak 2000 unit. PT. B menawarkan dengan harga $ 31 per unit untuk jumlah pesanan sampai dengan 1500 unit, dan dengan harga $ 28 per unit untuk unit ke 1501 dst. Jumlah persediaan komponen X dari PT. B adalah 3500 unit. PT. C menawarkan dengan harga $ 29 per unit dengan pesanan minimum 2000 unit. Persediaan PT. C adalah sebanyak 3500 unit. Berapa jumlah komponen yang harus dipesan oleh perusahaan tersebut dari setiap pemasok yang memberikan biaya pembelian total yang terendah. Buatlah model matematik dari persoalan di atas.

Penyelesaian :

Gambar berikut memperlihat grafik biaya total dari pembelian komponen dari berbagai perusahaan.



Variabel :

X1 = jumlah komponen yang dipesan dari PT. A

X2 = jumlah komponen yang dipesan dari PT. B

X3 = jumlah komponen yang dipesan dari PT. C

d1 = jumlah komponen yang dipesan dari PT. B dengan harga $ 31/unit

d1 = jumlah komponen yang dipesan dari PT. B dengan harga $ 28/unit

Fungsi Tujuan :

Min. Z = 30X1 + 31d1 + 28d2 + 29X3

Dengan kendala :

- kendala suplai dari PT. A : X1 $\le$ 2000
- kendala suplai PT. B : dengan harga \$ 31/unit : d1 $\le$ 1500

  dengan harga \$ 28/unit : d2 $\le$ 3500 – 1500

  $\le$ 2000

$$\left.\begin{array}{l}\text{jika } d2 = 0 \text{ maka } d1 \le 1500 \\ \text{jika } d2 > 0 \text{ maka } d1 = 1500\end{array}\right\} \rightarrow \text{bentuk ini tidak linier perlu dijadikan linier}$$

Bentuk di atas dapat diganti dengan :

1500y1 $\le$ d1 $\le$ 1500

0 $\le$ d2 $\le$ 2000y1

y1 = 0 atau 1

Bukti :

y1 = 0 $\rightarrow$ 0 $\le$ d1 $\le$ 1500

0 $\le$ d2 $\le$ 0 $\rightarrow$ d2 = 0

y1 = 1 $\rightarrow$ 1500 $\le$ d1 $\le$ 1500 $\rightarrow$ d1 = 1500

0 $\le$ d2 $\le$ 2000

- Kendala suplai PT. C: dengan jumlah pembelian minimum 2000 unit

  dan maksimum 3500 unit dengan harga \$ 29/u.

  X3 = atau $\ge$ 2000 $\rightarrow$ tidak linier, harus dijadikan linier

  X3 $\le$ 3500

Bentuk di atas dapat diganti dengan :

2000y2 $\le$ X3 $\le$ 3500 y2

y2 = 0 atau 1

Bukti :

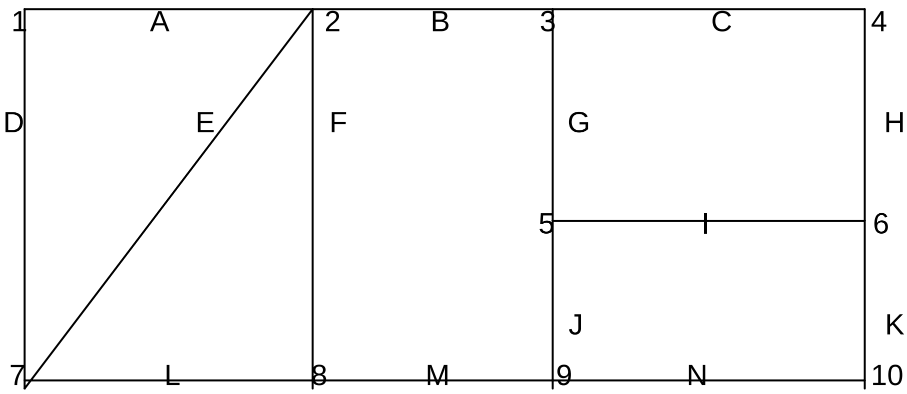
y2 = 0 $\rightarrow$ 0 $\le$ X3 $\le$ 0 $\rightarrow$ X3 = 0

y2 = 1 $\rightarrow$ X3 $\ge$ 2000

X3 $\le$ 3500

Contoh 6 : (set covering problem)

Pada sebuah kompleks perumahan (seperti pada gambar) akan ditempatkan pos satpam untuk mengamankan kompleks tersebut. Pos akan ditempatkan pada ujung jalan, sehingga pos tersebut dapat mengamati jalan yang berujung pada pos tersebut. Setiap jalan dikehendaki paling sedikit diamati oleh satu pos penjagaan. Tidak setiap ujung jalan perlu ditempati pos satpam. Buatlah model programa integer yang meminumkan jumlah pos yang dibangun.



Penyelesaian :

Variabel : $x_j = \begin{cases} 1 & \text{pos ditempatkan pada lokasi tersebut} \\ 0 & \text{pos tidak ditempatkan pada lokasi} \end{cases}$

Tujuan : Min. $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$

Kendala : jalan A : $x_1 + x_2 \geq 1$

jalan B : $x_2 + x_3 \geq 1$

jalan C : $x_3 + x_4 \geq 1$

jalan D : $x_1 + x_7 \geq 1$

jalan E : $x_2 + x_7 \geq 1$

jalan F : $x_2 + x_8 \geq 1$

jalan G : $x_3 + x_5 \geq 1$

jalan H : $x_4 + x_6 \geq 1$

jalan I : $x_5 + x_6 \geq 1$

jalan J : $x_5 + x_9 \geq 1$

jalan K : $x_6 + x_{10} \geq 1$

jalan L : $x_7 + x_8 \geq 1$

jalan M : $x_8 + x_9 \geq 1$

jalan N : $x_9 + x_{10} \geq 1$

Contoh 7 : (kendala pilihan)

Sebuah perusahaan menggunakan sebuah mesin untuk memprose tiga buah pekerjaan. Waktu proses, waktu penyerahan, dan biaya keterlambatan per hari dari setiap pekerjaan adalah seperti pada tabel. Waktu penyerahan diukur dari hari ke nol, yaitu waktu dimulainya pekerjaan yang pertama kali dikerjakan. Ingin ditentukan urutan pengerjaan yang memberikan biaya keterlambatan total yang terkecil. Buatlah model programa integer dari persoalan di atas.

Pekerjaan	Waktu proses (hari)	Waktu penyerahan (hari)	Biaya keterlambatan ($/hari)
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

Variabel : x_j = waktu mulai pekerjaan j (diukur dari hari ke nol), j = 1, 2, 3

Pada persoalan ini terdapat dua macam kendala, yaitu kendala yang menjamin dua pekerjaan tidak dikerjakan secara bersamaan dan kendala waktu penyerahan.

Kendala dua pekerjaan tidak dapat dikerjakan secara bersamaan :
Dua pekerjaan i dan j dengan waktu proses p_i dan p_j tidak akan dikerjakan secara bersamaan jika $x_i \geq x_j + p_j$ atau

$$\left.\begin{array}{l} x_i \geq x_j + p_j \text{ atau} \\ x_i \geq x_j + p_j \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_j \geq p_j \\ x_j - x_i \geq p_i \end{array}$$

bentuk pilihan di atas bukan bentuk yang linier → harus dijadikan linier.

Bentuk di atas dapat diganti dengan bentuk :

$$My_{ij} + x_i - x_j \geq p_j$$

$$M(1-y_{ij}) + x_j - x_i \geq p_i$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

kendala waktu penyerahan :

$$x_j + p_j + s_j' - s_j'' = d_j$$

dengan s_j' = kelebihan waktu penyerahan dari tanggal penyerahannya

s_j''= keterlambatan waktu dari tanggal penyerahannya dengan demikian model menjadi :

Tujuan Min. $Z = 19s_1'' + 12s_2'' + s_3''$

Kendala : $My_{12} + x_1 - x_2 \geq 20$

$M(1-y_{12}) + x_2 - x_1 \geq 5$

$My_{13} + x_1 - x_3 \geq 15$

$M(1-y_{13}) + x_3 - x_1 \geq 5$

$My_{23} + x_2 - x_3 \geq 15$

$M(1-y_{23}) + x_3 - x_2 \geq 20$

$x_1 + 5 + s_1' - s_1'' = 25$

$x_2 + 20 + s_2' - s_2'' = 22$

$x_3 + 15 + s_3' - s_3'' = 35$

$x_j; s_j'; s_j'' \geq 0$

METODE ‘BRANCH AND BOUND’

Metode ini adalah teknik yang sederhana dan sangat efisien untuk menyelesaiakn persoalan integer.

Dengan metode ini daerah penyelesaiannya harus dicari secara sisematis sampai sejumlah kecil penyelesaian integer yang mungkin diperoleh diperiksa penyelesaian mana yang optimal. Pertama kali diselesaikan persolan tanpa memperhatikan kendala integernya. Jika hasilnya telah integer berarti telah optimal, sedangkan jika belum diperoleh hasil integer yang dikehendaki kita lakukan branch and bound → membuat cabang dan membatasinya ke arah variabel yang belum integer, yaitu dengan menambah kendala baru.

Pertama : cabang kiri model semula ditambahkan kendala baru $x_j \leq a$

a adalah bilangan integer terdekat dari x_j yang lebih kecil dari x_j

Kedua : cabang kanan model semula ditambahkan kendala baru $x_j \geq b$

b adalah bilangan integer terdekat dari x_j yang lebih besar dari x_j

Kedua model yang baru tersebut diselesaikan. Akan diperoleh hasil optimal dari kedua model tersebut, di mana variabel keputusannya sebagian/semuanya merupakan bilangan integer. Jika kriteria integer yang dikehendaki belum terpenuhi semuanya dilakukan pencabangan ke arah variabel keputusan yang belum integer. Demikian seterusnya sampai semua kriteria integer yang dikehendaki terpenuhi.

Contoh 6 :

Model Programa Integer :

f. t. maks. $Z = X1 + X2$

D. K. $3X1 + X2 \leq 3$

$X1 + 3X2 \leq 6$

$X_J \geq 0$ dan integer $j = 1; 2$

Penyelesaian :

Setelah diselesaikan dengan mengabaikan ketentuan integer diperoleh hasil : $x_1^* = 3/8$; $x_2^* = 15/8$; $z^* = 18/8$

(tanda * menunjukkan nilai optimal)

Nilai x_1 dan x_2 belum integer

Pertama kali dibuat terlebih dahulu x_1 menjadi integer

$0 < x_1 = 3/8 < 1$. Ditambahkan kendala $x_1 \leq 0$ dan $x_1 \geq 1$ pada model programa linier di atas.

P. L. 2 :

f. t. maks. $Z = x_1 + x_2$

d. k.

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 \leq 0$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2$$

P. L. 3

f. t. maks. $Z = x_1 + x_2$

d. k.

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 1$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2$$

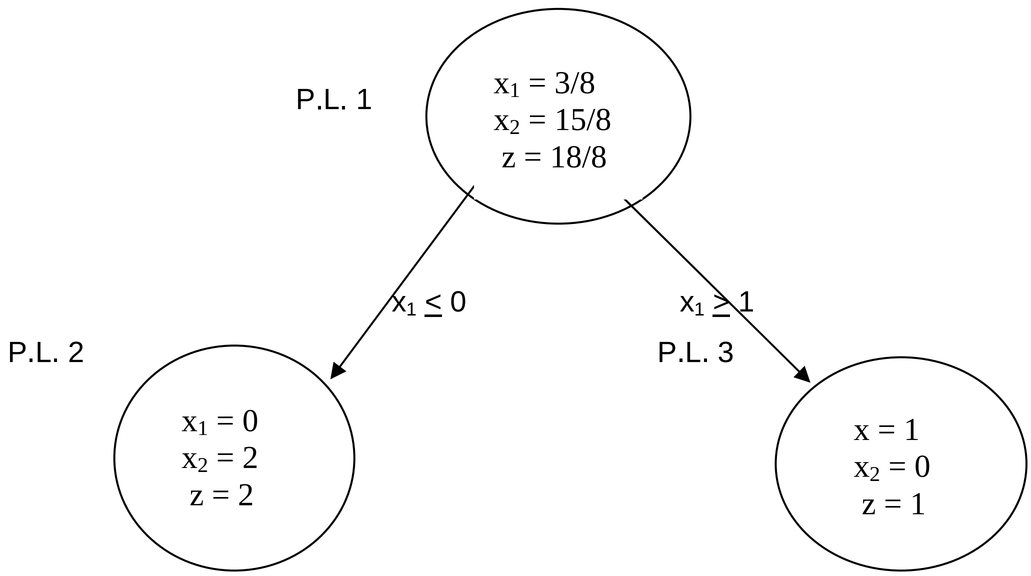
Dari P. L. 2 terdapat kendala $x_1 \geq 0$ $x_1 \leq 0$. Kedua kendala tersebut akan menghasilkan $x_1 = 0$ (Nilai di luar tersebut adalah tidak mungkin)

Dari P. L. 3 terdapat kendala tambahan $x_1 \geq 1$ jika digabungkan dengan hasil x_1 optimal pada 3/8 (pada P.L.1) akan menghasilkan $x_1 = 1$ optimal pada P.L. 3. Kendala $x_1 \leq 0$ dan $x_1 \geq 1$ memaksa nilai x_1 menjadi integer (d.h.i. 0 atau 1)

Nilai optimalnya adalah :

P. L. 2 : $x_1^* = 0$; $x_2^* = 2$; $z^* = 2$

P. L. 3 : $x_1^* = 1$; $x_2^* = 0$; $z^* = 1$



Oleh karena kedua cabang tersebut langsung memperoleh penyelesaian yang integer, maka dipilh cabang yang memberikan nilai fungsi tujuan yang optimal. Dengan demikian penyelesaiannya adalah $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $z = 2$

Contoh 7 :

Maks. $Z = 2X_1 + 5X_2 + 3X_3$

D. K. $2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 13$

$3X_1 - 4X_2 + 2X_3 \geq 7$

$X_J \geq 0$ dan integer $j = 1; 2; 3$

Penyelesaian :

Jika diselesaikan dengan P.L. biasa diperoleh :

$x_1^* = 33/7$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 25/7$; $z^* = 141/7$

oleh karena x_1 dan x_2 belum integer, harus dilakukan pencabangan, akan tetapi pada cabang yang mana.

Untuk sementara waktu ditentukan melakukan pencabangan ke variabel yang subscriptnya yang terendah.

Dengan cara ini diperoleh pohon seperti pada gambar 14.5. Pada gambar tersebut hanya diberikan pecabangan ke arah kiri saja.

Pada gambar 14.6 diberikan pencabangan seperti pada gambar 14.5 namun di sini tidak diberikan hasil optimasinya. Gambar 14.7 memperlihatkan semua cabang yang lengkap. Terlihat tidak semua cabang memberikan penyelesaian yang layak (titik 8, 9 dan 10). Dengan membandingkan semua hasil yang integer, diperoleh keadaan optimal pada titik 11 dengan nilai $Z^* = 19$.

Hasil perhitungan titik 11 adalah :

$X1^* = 33/7$

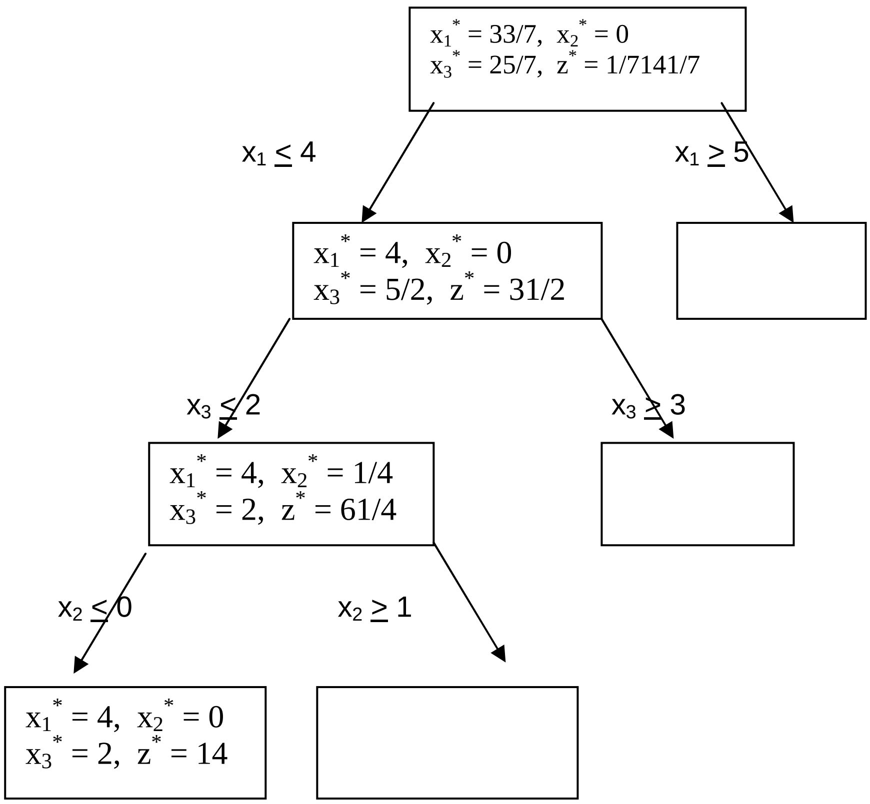
$X2^* = 0$

$X3^* = 25/7$

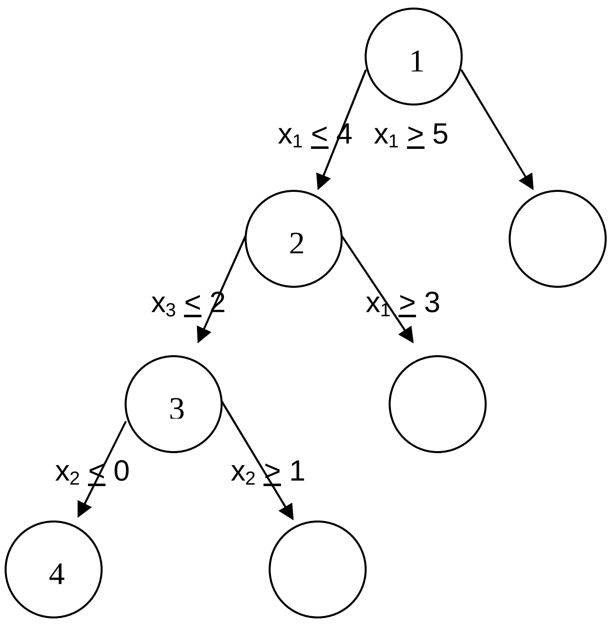
$Z^* = 19$

Pada gambar 14.8 dilakukan pencabangan ke arah kiri dan kanan. Dari sana terlihat pada cabang kiri belum semua variabelnya integer dengan nilai Z = 31/2 sedangkan pada cabang kanan semua variabel telah integer dengan nilai Z = 19. Oleh karena nilai cabang kanan lebih besar dibandingkan cabang kiri, tidak perlu dilakukan pencabangan lebih lanjut pada arah bawah cabang kiri tersebut karena dipastikan akan diperoleh cabang dengan nilai Z yang lebih rendah. Dengan demikian jika telah diperoleh pada suatu cabang kriteria integernya telah terpenuhi sedangkan cabang lainnya mempunyai nilai Z lebih rendah maka pencabangan dihentikan dan kondisi optimal adalah yang telah diperoleh.

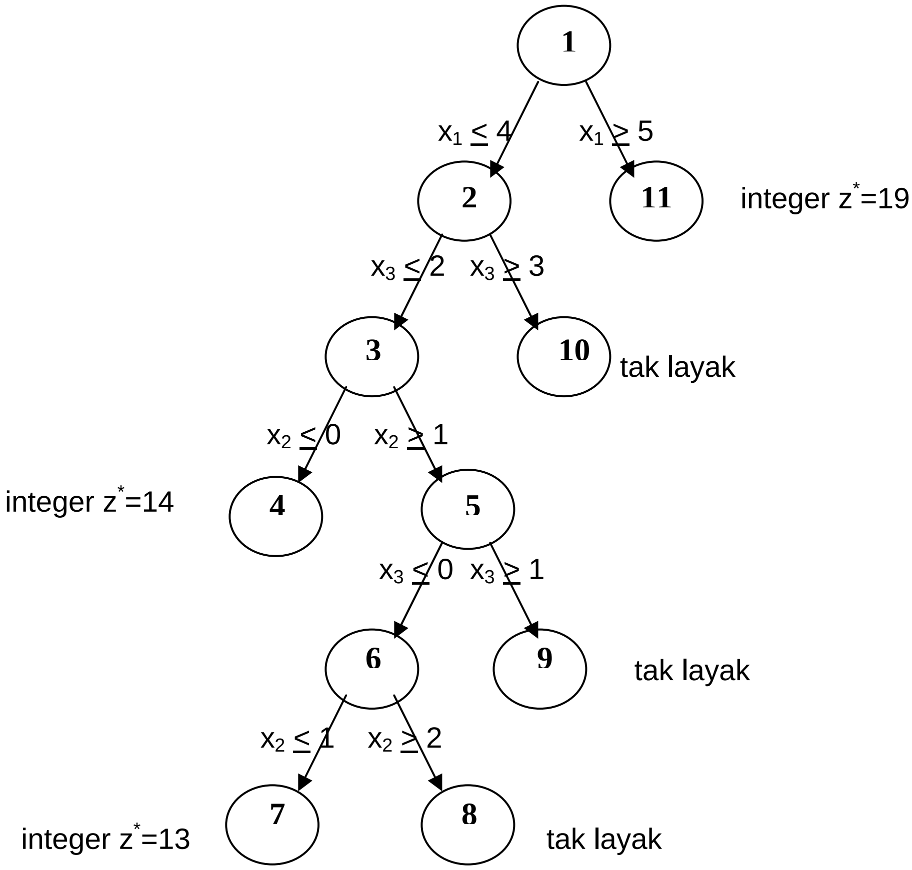
Prosedur pencabangan digambarkan pada gambar 14.9.



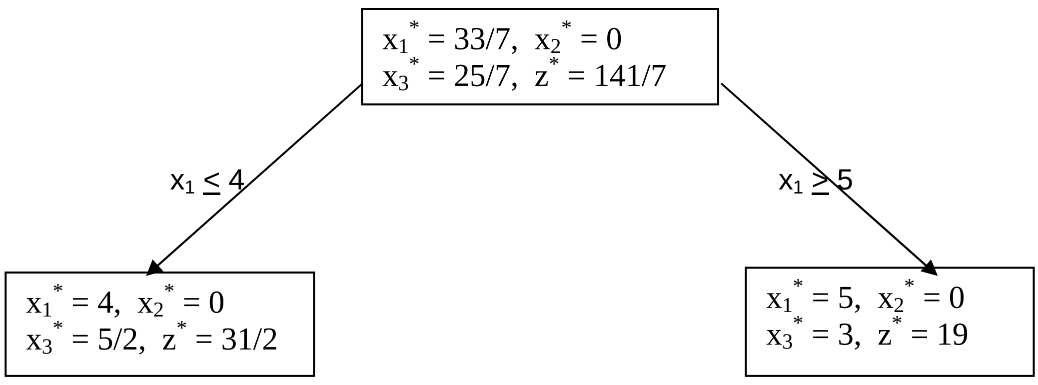
Gambar 14.5



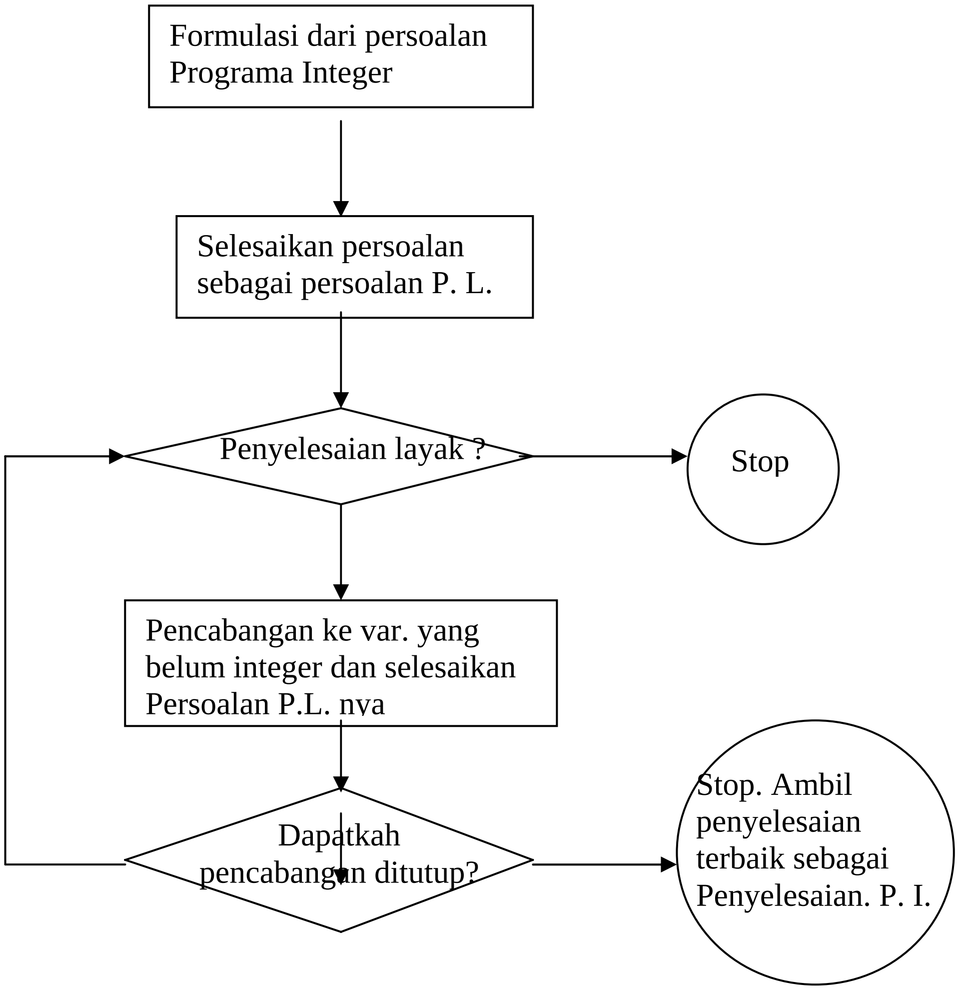
gambar 14.6



gambar 14.7



Gambar 14.8


Formulasi dari persoalan Programa Integer
Selesaikan persoalan sebagai persoalan P. L.
Penyelesaian layak ?
Stop
Pencabangan ke var. yang belum integer dan selesaikan Persoalan P.L. nya
Dapatkah pencabangan ditutup?
Stop. Ambil penyelesaian terbaik sebagai Penyelesaian. P. I.

gambar 14.9